Některé netradiční úlohy o křivkách

Lenka Lomtatidze
Katedra matematiky, Př F MU Brno
e-mail: mlc@math.muni.cz

V historii geometrie se nachází široké spektrum zajímavých a dnes často opomíjených témat. Vhodně zvolené netradiční úlohy umožňují procvičit a upevnit získané znalosti, podporují kreativní myšlení žáků a v neposlední řadě mohou nepochybně svým historickým pozadím zvyšovat jejich motivaci. Navíc se nám dnes nabízí možnost zpracovávat tato témata netradičními metodami — a to pomocí počítače.

V příspěvku ukážeme několik zajímavých úloh s historickým pozadím, které se týkají kuželoseček a některých dalších algebraických křivek. Vybrané úlohy umožňují procvičit celou řadu poznatků ze středoškolské geometrie a zejména ukázat jejich vzájemné souvislosti. Všechny úlohy jsou řešeny s využitím výukového software pro geometrii Cabri Géomètre II (dále jen Cabri), což přináší další výhody, ale jeho použití k řešení úloh není podmínkou.[1]

Kuželosečky

Objevení kuželoseček s největší pravděpodobností souviselo s tzv. *problémem zdvojení krychle*. K tomuto problému se váží nejrůznější legendy.[2] V dnešní terminologii bychom úlohu o zdvojení krychle formulovali následovně: Pro danou krychli o hraně délky a je třeba najít krychli (přesněji řečeno délku její hrany), která bude mít dvojnásobný objem, tj. hledáme x splňující

$$x^3 = 2a^3. \tag{1}$$

Připomeňme, že ve starověku neexistovala žádná algebraická symbolika a vyřešit tuto úlohu znamenalo vyřešit ji euklidovsky, tj. „pomocí kružítka a pravítka“ — přesněji řečeno geometrickou konstrukcí, ve které je užito jen konečného počtu přímek a kružnic.[3]

[1] Informace o programu Cabri Géomètre II je možno najít např. na `http://www.pf.jcu.cz/cabri/`. Na této adrese je možno nalézt také demoverzi a české prostředí pro Cabri (vše je volně ke stažení).

[2] Např. *Jedna z několika legend spojovala tuto úlohu s řeckou věštkyní Pythií, která žádala, aby byl na usmíření bohů postaven na ostrově Délos, kde vypukla epidemie, oltář, který by byl opět krychlový, ale měl by dvojnásobný objem původního oltáře.* [8, str. 105], podobná verze viz např. [4, str. 71].

[3] Dnes víme, že požadovanou konstrukcí je úloha o zdvojení krychle neřešitelná. Neřešitelnost problému zdvojení krychle i některých dalších starověkých úloh euklidovskou konstrukcí byla dokázána v 19. století. V literatuře jsou tyto otázky podrobně vyloženy (viz např. [7]).

Přibližně v 5. století před Kr. Hippocrates z Chiu redukoval problém zdvojení krychle na problém nalezení dvou středních geometrických úměrných.[4] V dnešní terminologii bychom jeho úvahu vyjádřili přibližně takto: Nechť a je hrana krychle. Je třeba najít x, y tak, aby platilo

$$a : x = x : y = y : 2a, \tag{2}$$

tj. aby platily kterékoliv dvě z následujících rovnic

$$x^2 = ay,\ y^2 = 2ax,\ xy = 2a. \tag{3}$$

Vyloučením y obdržíme $x^3 = 2a^3$, tedy x je hrana hledané krychle.

Jako první nalezl řešení Menaichmos (cca 380–320 před Kr.). Ukázal, že průsečík dvou parabol, popř. průsečík paraboly s rovnoosou hyperbolou, dává očekávané hodnoty x, y, a tedy řeší problém zdvojení krychle. Není přesně známo, jak tyto křivky Menaichmos sestrojil. Jednotlivé body těchto křivek lze sestrojit euklidovsky, ale kompletně je zkonstruovat euklidovsky nemůžeme.

Nejvýznamnější spis o kuželosečkách *Kónika (Kuželosečky)* pochází od Apollonia z Pergy (260 - 180 před Kr.). Kuželosečky jsou zde vyloženy jako řezy na kuželi způsobem, který se v podstatě neliší od dnešního. Spis sestával z osmi knih, z nichž první čtyři se dochovaly v řečtině, další tři v arabském překladu a poslední byla ztracena. Zejména knihy pátá až sedmá jsou velmi originální, zahrnují dokonce diskuzi evolut kuželoseček a jiné zajímavé vlastnosti. Téměř dva tisíce let nebylo Apolloniovo dílo překonáno.

O tom, jak přišli Řekové na to, že křivky, objevené při řešení problému zdvojení krychle, lze obdržet jako řezy na kuželi, můžeme dnes jen spekulovat.

Popišme stručně Menaichmovu myšlenku a ukažme, jak využil střední geometrickou úměrnou k nalezení kuželoseček. Uvažujme v rovině dvě vzájemně kolmé přímky p, q. Jejich průsečík označme S (obr. 1). Dále uvažujme veličinu $a = |SA|$. Nechť $2a = |SB|$, $A \in p$, $B \in q$. Uvažujme bod Q pohybující se z bodu S ve směru opačném k $\mapsto SB$. K tomuto bodu Q existuje právě jediný bod T tak, že $\sphericalangle AQT$ je pravý, a právě jediný obdélník $SQUT$. Z podobnosti trojúhelníků ASQ a QST obdržíme

$$\frac{|SA|}{|SQ|} = \frac{|SQ|}{|ST|},$$

a odtud

$$|SQ|^2 = |ST| \cdot |SA|. \tag{4}$$

[4]Obecně problém nalezení dvou středních geometrických úměrných značí nalézt ke dvěma daným veličinám a, b veličiny x, y tak, aby platilo $a : x = x : y = y : b$.

Obdobnou úvahu provedeme pro bod P pohybující se po přímce p (obr. 1). Potom

$$|SP|^2 = |SR| \cdot |SB| \,. \tag{5}$$

Odtud plyne, že pohybuje–li se bod Q po přímce q a bod P po přímce p, pak se body U a V pohybují po parabolách (4), (5).

Užitím výukového software Cabri jsme zkonstruovali dynamický obrázek, na kterém lze sledovat, jak vrcholy U a V jednotlivých obdélníků vykreslují při pohybu bodů P a Q paraboly. V souřadném systému $\langle S, x, y\rangle$, $x \sim q$, $y \sim p$, označme $U = [u_1, u_2]$, $V = [v_1, v_2]$. Pak můžeme užít pro trojúhelníky TAQ, BRP Euklidovu větu o výšce a vyjádřit rovnice parabol (4), (5) jako

$$u_1^2 = a \cdot u_2, \qquad v_2^2 = 2a \cdot v_1. \tag{6}$$

Průsečík parabol označme $X = [x, y]$. Potom (obr. 2)

$$x^2 = a \cdot y, \qquad \text{tj.} \quad y^2 = 2a \cdot x. \tag{7}$$

Snadno lze ukázat, že bod X se pohybuje také po hyperbole s asymptotami p, q.

Odtud plyne, že jsou splněny podmínky (3) a uvedeným postupem můžeme ke každé veličině a najít veličiny x, y tak, aby platily vztahy (2). Uvedená konstrukce ovšem není euklidovská.

Na prezentované úloze lze procvičit podobnost trojúhelníků, Euklidovu větu o výšce, rovnice paraboly apod. Úloha také umožňuje žáky motivovat krátkým historickým vyprávěním.

Bernoulliho lemniskáta

Nechť F a G jsou dva pevně dané body v rovině. Množina bodů X v rovině takových, že součin vzdáleností $|FX|$ a $|GX|$ je konstantní a roven k^2, tj.

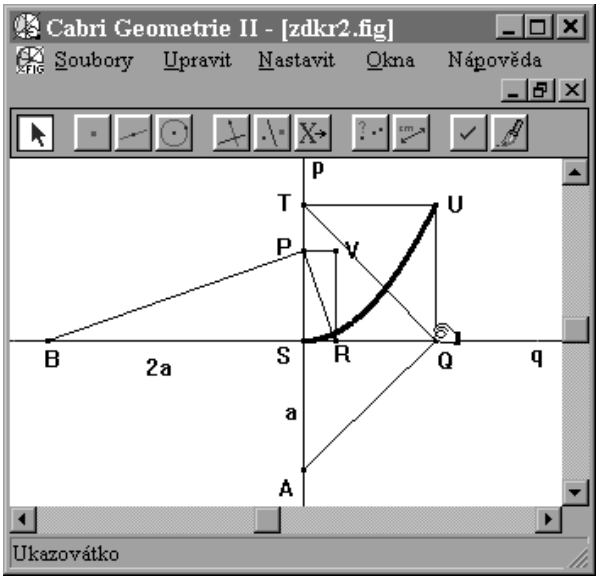
$$|FX| \cdot |GX| = k^2, \tag{8}$$

se nazývá ***Cassiniho ovál***.[5]

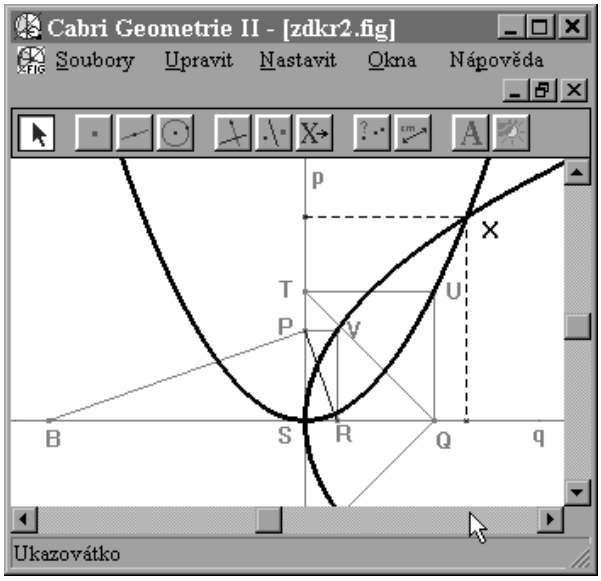
Označme vzdálenost mezi body F a G (ohnisky) $2c$. Odvodit implicitní vyjádření rovnice (8) v pravoúhlé souřadné soustavě $\langle S, x, y\rangle$ můžeme využít jako cvičení pro studenty. Označme $|FS| = c = |GS|$, $F[-c, 0]$, $G[c, 0]$. Potom lze vztah (8) přepsat v souřadnicovém vyjádření jako

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = k^2. \tag{9}$$

[5]Křivka se nazývá ***Cassiniho ovál*** po francouzském astronomovi italského původu Giovannim Domenicu Cassinim (1625–1712). Cassini ji popsal roku 1680. Více o Cassiniho oválech viz např. [2]).



Obrázek 1



Obrázek 2

Úpravami obdržíme z (9) známé vyjádření Cassiniho oválů

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)+c^4-k^4=0. \tag{10}$$

My se budeme zabývat pouze speciálním případem, kdy $k=c$. Křivka o rovnici

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=0 \tag{11}$$

se nazývá *Bernoulliho lemniskáta*.[6]

Geometrické vlastnosti Bernoulliho lemniskáty jsou dalším vhodným námětem pro cvičení podporované počítačem, při kterém lze současně procvičit úpravy algebraických výrazů, derivování, práce se souřadným systémem apod. Např. ji lze vygenerovat jako obálku kružnic, které mají střed na rovnoosé hyperbole a procházejí středem souřadného systému, který koresponduje se středem hyperboly (viz obrázek 3). Vytvořit obálku těchto kružnic pomocí Cabri je poměrně snadné (viz obrázek 4), zkusme však ověřit také výpočtem, že se skutečně jedná o křivku o rovnici (11).

[6]Pojmenovaná po Jacobu Bernoullim (1654–1705), bratrovi neméně proslulého matematika Johanna Bernoulliho. Jacob Bernoulli ji popsal nezávisle na Cassinim v roce 1694 a pojmenoval ji „lemniscus“. Název pochází z řeckého slova $\lambda\eta\mu\nu\iota\sigma\kappa o\varsigma$ – stuha, mašle. Jacob Bernoulli uveřejnil svůj objev v *Acta Eruditorum* v září 1694. Překvapivé je, že o souvislosti Cassiniho oválu a Bernoulliho lemniskáty nevěděli matematikové ještě více než sto let, ačkoliv zejména lemniskátou se řada z nich zabývala (viz [6, str. 215]).

Uvažujme pravoúhlou souřadnou soustavu $\langle S, x, y\rangle$. Rovnice kružnice se středem $O = [m, n]$ a poloměrem r bude tvaru

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2. \tag{12}$$

Středy těchto kružnic musí ležet na rovnoosé hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \tag{13}$$

tj. $r^2 = m^2 + n^2$ (viz obrázek 3) a musí být splněna podmínka $m^2 - n^2 = a^2$. Odtud a z 12 obdržíme rovnici soustavy křivek ve tvaru $F(x, y, m) = 0$, kde m je parametr a

$$F(x, y, m) = (x^2 + y^2)^2 - 4mx(x^2 + y^2) + 4m^2(x^2 - y^2) + 4y^2a^2\,.$$

Obálku této soustavy křivek získáme, jestliže se nám podaří ze soustavy

$$\begin{aligned} F(x, y, m) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial m} F(x, y, m) &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

vyloučit parametr m. Soustava rovnic (14) bude v našem případě tvaru

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 - 4mx(x^2 + y^2) + 4m^2(x^2 - y^2) + 4y^2a^2 &= 0, \\ -4x(x^2 + y^2) + 8m(x^2 - y^2) &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Odtud vyloučíme m a obdržíme rovnici

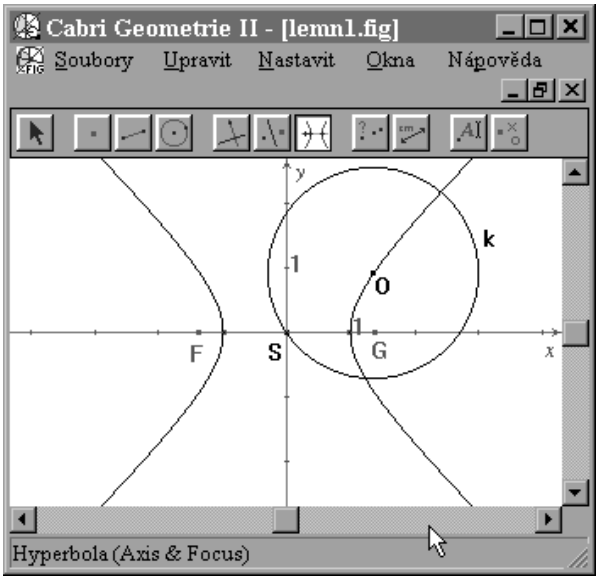
$$(x^2 + y^2)^2 + 4a^2(y^2 - x^2) = 0, \tag{16}$$

což odpovídá rovnici Bernoulliho lemniskáty. Srovnáním rovnice (16) s rovnicí (11) získáme vztah mezi délkou poloosy hyperboly a a vzdáleností ohniska lemniskáty od středu c

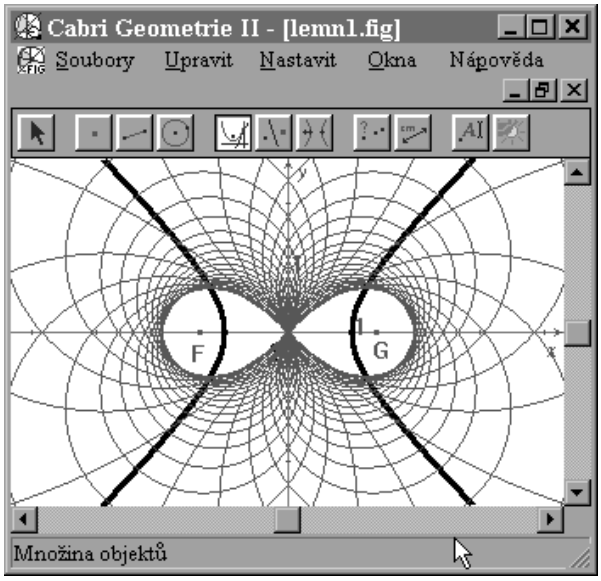
$$c = \sqrt{2}a.$$

Nyní je zřejmé, že ohniska rovnoosé hyperboly i ohniska lemniskáty jsou tytéž body F a G.

Další úlohy z analytické geometrie, o obálkách křivek apod. (včetně popisu jejich zpracování v Cabri) lze najít v sérii článků vycházejících v časopise Učitel matematiky [3]. Omezený rozsah tohoto příspěvku bohužel nedovoluje podrobnější rozvedení této problematiky.



Obrázek 3



Obrázek 4

Literatura

[1] Čechová, L.: *Software pro výuku geometrie*, `http://www.math.muni.cz/~mlc/geom/`

[2] Čechová, L.: *Cassiniho ovál na počítači, Sborník 21. konference o geometrii a počítačové grafice, Lednice 2001*,

[3] Čechová, L.: *Geometrie a počítač (1)-(2) aneb nebojte se Cabri*, Učitel matematiky, ročník 10, č. 2–4, 2002

[4] Ed. Fuchs E., Bečvář J.: *Historie matematiky I*, Praha 1993 (Dějiny matematiky, svazek 1).

[5] Ed. Fuchs E., Bečvář J.: *Matematika v 16. a 17. století*, Praha 1999 (Dějiny matematiky, svazek 12).

[6] Loria, G.: *Spezielle algebraische und transcendente ebene Curven*, I. a II. díl, 2. vydání, Leipzig und Berlin 1910.

[7] Schwarz, Š.: *Základy náuky o riešení rovníc*, SAV, Bratislava 1967.

[8] Kolman, A.: *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.