Křivky v antické geometrii (1)

Antika je opojena božským darem, jímž je geometrický svět. Je to dar, k němuž se upíná a jímž je ovlivněn hlavní směr jejího myšlení a konání. Vopěnka [Vop89, str. 66]

Antikou dnes rozumíme období starověkého Řecka a Říma zahrnující časový úsek přibližně od 14. století př. Kr. do roku 476 po Kr., kdy došlo k zániku Západořímské říše.[1]

1. Pojetí geometrie ve starověku

Abychom porozuměli tomu, jak Řekové studovali křivky, musíme mít na paměti, že jejich pohled na geometrii se v mnohém odlišoval od pohledu dnešního.

- Odlišné chápání geometrických objektů.
- Problém vyjádřit pohyb a nekonečno.
- Geometrické chápání veličin.

Ovlivněni množinovým pojetím geometrie, pohlížíme v dnešní době na geometrické objekty obvykle jako na množiny bodů. [Vop89, str. 24]

Tohle však nebyl pohled starověkých geometrů. Bod byl pro ně něco, co nemá dílu, tj. základní nedělitelný prvek.[2] Jiné geometrické objekty se daly dělit. Velkým problémem v řecké geometrii (a matematice i filozofii vůbec) bylo pojetí pohybu a nekonečna. Kolem roku 450 př. Kr. vypracoval Zenon z Eley proslulé paradoxy pohybu. Ačkoliv je již Aristoteles[3] považoval za logické chyby, nepodařilo se jemu ani jiným starořeckým matematikům vyjádřit v logice pojmů rozpor mezi pohybem, prostorem a časem. „Aristotelovské“ pojetí pohybu bylo plně překonáno teprve v 17. století.[4]

[1] Výraz *antika* pochází z latinského *antiquus* – starý, starobylý. Původně termín antika označoval pouze řecké a římské umělecké památky, jež byly chápány jako klasický vzor krásy. Novodobé chápání antiky jako historické epochy, ve které zásluhou řeckých i římských tvůrců vznikal základ evropské vzdělanosti, bylo plně prosazeno teprve na počátku 20. století.
Počátek antiky – datovaný dříve do 9. století př. Kr. (doba vzniku Homérských básní) – byl po rozluštění hliněných tabulek popsaných krétsko-mykénským písmem posunut do století čtrnáctého. Jako konec se nejčastěji uvádí rok 476 pro západní část (zánik Západořímské říše) a rok 529 pro část východní (zavření „pohanských“ filozofických škol), [Svo73, str. 57].

[2] Viz [Ser07, str. 1].

[3] Aristoteles (384–322 př. Kr.)

[4] Při „Aristotelovském“ pojetí je potřebné k popisu pohybu tělesa znát jeho polohu v každém okamžiku. Teprve v 17. století bylo plně přijato, že pohybující se objekt prochází svou drahou bod po bodu, spojitě a ve spojitém čase.

Proto, aby se vyhnuli obtížím v dalším rozvíjení matematických základů a v jejich zdůvodňování, většinou raději buď vůbec v matematice nepoužili ideí nekonečna a pohybu, nebo je co nejvíce omezovali, přičemž tvrdili, že se věci a geometrické veličiny dají bez omezení dělit. [Kol68, str. 96]

Jak ukážeme dále, tento postoj měl velký vliv i na studium křivek.

Thomas [Tho80a, str. viii] vidí tři charakteristické rysy řecké matematiky (1) v preciznosti, se kterou velcí řečtí geometři demonstrovali, co dokazují, (2) v dominantnosti řecké geometrie a (3) v dokonalém způsobu práce. Výraznou dominantnost řecké geometrie a jisté podřízení aritmetiky geometrii můžeme pozorovat po objevu nesouměřitelnosti úseček[5] (pythagorejci, 5. stol. př. Kr.), kdy se zhroutily tehdejší představy o základech matematiky, tzv. první krize[6] matematiky. Východiskem z krize se stala *řecké geometrická algebra*.[7] Veličiny již nebyly chápány jako čísla (přirozená a jejich poměry), ale jako délky, obsahy a objemy (ale nikoliv reprezentovány čísly). Délky byly reprezentovány úsečkami, obsahy čtverci a objemy krychlemi, přičemž při operování s takovými veličinami bylo možno sčítat a odčítat jen veličiny „stejného druhu“, tj. délky s délkami, obsahy s obsahy a objemy s objemy (tzv. zákon homogenity).[8] Všechny úměrnosti byly vyvozovány z podobnosti trojúhelníků a zacházelo se s nimi výhradně tímto způsobem. To pochopitelně velmi brzdilo vývoj algebry, neboť v geometrické algebře lze hovořit o součinu dvou veličin (obdélníku), tří veličin (kvádru), ale nelze už dost dobře hovořit o součinu čtyř veličin, nic tomu totiž neodpovídá. Pappos píše:

Nedlouho před námi se však někteří dohodli, že by se takové výrazy používat mohly, jenže neměli jasno, co by to mělo znamenat, když vynásobí obdélník čtvercem nebo jiným obdélníkem. [Des37, str. 306]

Ačkoliv budeme pro jednodušší vyjadřování používat v dalším textu dnešní „descartovskou“ symboliku, je třeba mít na zřeteli, že vyjadřovací způsob starých Řeků byl díky geometrickému chápání veličin zcela odlišný (srovnání viz ukázky z textů – tabulky 1, 2, 3).

[5] Dvě úsečky délky a, b se nazývají nesouměřitelné, jestliže neexistuje úsečka délky j tak, že úsečky a, b se dají vyjádřit jako její násobky, tj. $a = p \cdot j$, $b = q \cdot j$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Příkladem dvou nesouměřitelných úseček je strana a úhlopříčka čtverce.

[6] Druhá krize matematiky, jenž byla spojena s pojmem nekonečně malé veličiny, byla překonána v 19. století precizním vybudováním základů matematické analýzy, tzv. aritmetizací matematické analýzy. Třetí krize matematiky souvisí s objevením antinomií v teorii množin na počátku 20. století a do jisté míry byla překonána požadavky na axiomatické budování teorií.

[7] Termínem *řecká geometrická algebra* je míněn přechod od aritmetického chápání veličin ke geometrickému. Jedná se tedy spíše o *geometrickou aritmetiku* než *algebru*. Pojem algebra má význam obecnější.

[8] Zákon homogenity a podřízení aritmetiky geometrii byly překonány v plné míře teprve R. Descartem v 17. století.

Operovat s těmito veličinami pak znamenalo provádět geometrickou konstrukci pravítkem a kružítkem, tj. sestrojit konečný počet kružnic a přímek (tato konstrukce je často nazývána *eukleidovská*, neboť na tomto principu byly vybudovány Eukleidovy *Základy*). Je snadné si představit např. operace s úsečkami.

Kupodivu největší potíže nastaly u proměn křivek. Jiné křivky než lomené čáry se nepodařilo proměnit v úsečky. Tedy to, co vlastně napínači provazců prováděli denně, nemělo v geometrii žádný výklad. [Vop89, str. 60]

Je třeba převést křivku na úsečku stejné délky. Pokud budeme uvažovat kružnici, pak tu máme problém rektifikace kružnice. Obecně jde o problém rektifikace libovolné křivky. Obdobně bychom mohli pokračovat v úvahách o sčítání a odčítání úhlů apod.

Není nijak překvapivé, že při tomto pojetí veličin a operací s nimi, došli Řekové k třem proslulým problémům starověku: [9]

- kvadratura kruhu – k danému kruhu najít čtverec o stejném obsahu, což úzce souvisí s rektifikací kružnice,
- zdvojení krychle – k dané krychli najít krychli o dvojnásobném objemu,
- trisekce úhlu – daný úhel rozdělit na tři stejné části.

Závažnost těchto problémů tkví v tom, že nemohou být řešeny geometricky bez aproximace, tj. konstrukcí užívajících konečného počtu přímek a kružnic; právě proto se staly prostředkem k pronikání do nových oblastí matematiky. Vedly k objevení kuželoseček, některých kubických křivek, křivek čtvrtého řádu a jedné transcendentní křivky - kvadratrix. [Str63, str. 37]

Ukážeme, že ve starověku bylo v podstatě objevení všech křivek podmíněno snahou najít řešení těchto tří problémů.

[9] Tři proslulé problémy starověku „trápily“ matematiky až do 19. století, kdy bylo dokázáno, že jsou eukleidovsky neřešitelné, tj. nelze najít přesné řešení požadovanou metodou – eukleidovskou konstrukcí. Pro praxi pochopitelně stačí vhodné přibližné řešení, které bylo již ve starověku užíváno. Stručné výstižné pojednání o tom, jak je to s neřešitelností těchto úloh lze najít např. v [Fuc93, str. 90].

2. Křivka, přímka a kružnice u Eukleida

Přímkou rozuměli Řekové něco omezeného. Ukážeme, jak pojednává o přímce a kružnici Eukleides v axiomaticky budovaném spise *Základy*. Eukleidovy *Základy* jsou snad jednou z nejslavnějších knih v historii, která se na více než dva tisíce let stala vzorem pro výuku geometrie. Svůj stěžejní význam snad více než obsah má právě forma *Základů*, totiž formulace poznatků do definic, postulátů a vět. Této formě vděčíme také za to, že zde nalézáme první historicky doloženou definici křivky. Eukleidovy *Základy* jsou studovány v řadě odborných článků a monografií, odkazujeme čtenáře na [Beč02]. Zde se budeme zabývat jen některými pasážemi první knihy, které bezprostředně souvisí s naším tématem.[10]

V první knize Eukleidových Základů se v úvodu nachází 23 definic, 5 postulátů a 9 axiomů, za kterými následují tvrzení s důkazy. Citujeme první definice:
1. Bod jest, co nemá dílu.
2. Čára pak délka bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.
4. Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně. [Ser07, str. 1]

Ona první historicky doložená definice křivky se skrývá v Eukleidově druhé definici. I když nejde pochopitelně o exaktně přesnou definici (neboť není řečeno, co je to délka a co je to šířka), je zde intuitivně velmi dobře vystižena vlastnost, kterou se křivka odlišuje od rovinných útvarů a kterou se v moderní matematice snažili matematikové exaktně zachytit, jak uvidíme v kapitole šesté. Přímo z druhé definice nelze sice přímo říci, jaký typ čáry má Eukleides na mysli, ale je zřejmé, že nemíní přímku, nýbrž křivku, protože přímka je definována následně v definici čtvrté. Pojetí křivky upřesňuje také definice třetí, z níž plyne, že je na ni pohlíženo jako na objekt konečný, ohraničený dvěma body. Také přímkou rozuměli Řekové něco omezeného. Eukleides v podstatě definuje úsečku, nikoliv přímku, ale s tím, že tuto úsečku můžeme dle potřeby libovolně prodloužit. Opět se tím vyhne pojmu nekonečno.

V úvodních postulátech[11] říká:

1. Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.
2. A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti. (...) [Ser07, str. 2]

Kružnice je poněkud skrytě zavedena v definici kruhu:

15. Kruh jest útvar rovinný, objímaný jedinou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu uvnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.
16. Středem pak kruhu zove se ten bod. [Ser07, str. 1]

[10] Vycházíme z českého překladu Františka Servíta (1848–1923), jediného kompletního překladu, který byl u nás vydán – [Ser07].
[11] V překladu F. Servíta je užit termín *úkoly prvotné*, dnes se však běžně užívá termínu postuláty.

V jiném českém překladu, který však zůstal jen v rukopise[12] je tato definice uvedena v trochu jiném znění, kde se přímo termín kružnice vyskytuje:

15. Kruh jest obrazec plochý, omezený jedinou čarou, řečenou kružnice; od této veškeré přímky vedené k témuž bodu uvnitř kruhu ležícímu jsou si rovny.
16. Bod ten zove se střed kruhu. [Beč02, str. 132]

3. Hippiova kvadratrix

První studovaná křivka po kružnici a přímce byla transcendentní ***Hippiova kvadratrix***. V 5. století př. Kr. ji popsal Hippias z Elis[13] jako křivku, kterou lze užít k trisekci úhlu (proto ji můžeme v literatuře najít také pod názvem *Hippiova trisektris*). Později ji Deinostratos[14] aplikoval k řešení kvadratury kruhu a odtud dostala název.[15]

Hippias převedl problém dělení úhlu na problém dělení úsečky. V dnešní terminologii můžeme jeho definici kvadratrix vyjádřit následovně:
Uvažujme čtverec $ABCD$ (viz obr. 2 a) a dva pohyby takové, že:
(1) úsečka AB se otáčí kolem bodu A (proti směru hodinových ručiček),
(2) úsečka BC se posouvá ve směru $\overrightarrow{CD}$,
(3) oba pohyby jsou rovnoměrné a ve stejný okamžik začnou i skončí,
pak průsečík X pohybujících se úseček AB a BC opíše křivku z bodu B do bodu H.[16]

Ukážeme, jak lze pomocí této křivky rozdělit libovolný daný úhel na tři části:
Nechť je dán úhel EAB. Ve čtverci $ABCD$ sestrojíme kvadratrix q (výše uvedenou konstrukcí) a úhel EAB – viz obr. 2 b). Kolmý průmět bodu $X = q \cap \mapsto AE$ označíme X_1. Úsečku X_1B rozdělíme na tři části. Bodům Y_1, Z_1 odpovídají body Y, Z na q. Z definice Hippiovy kvadratrix plyne, že polopřímky AY, AZ dělí úhel EAB na tři stejné části. Ihned je také vidět, že takto lze daný úhel obecně rozdělit na libovolný počet částí. Problém trisekce úhlu tím ale není vyřešen eukleidovsky, neboť pomocí pravítka a kružítka lze sestrojit jen některé body kvadratrix q. Celou křivku můžeme znázornit např. přiložením vhodného křivítka vynesenými body.

---

[12] Překlad první knihy Eukleidových *Základů* od Josefa Smolíka (1832–1915). Viz [Beč02, str. 3].

[13] Hippias z Elis (470–410 př. Kr.).

[14] Deinostratos (390–320 př. Kr.), žák Platóna a Eudoxa, bratr Menaichmův.

[15] Kvadratrix je obecně název pro křivku, kterou lze užít ke kvadratuře kruhu a trisektris pro křivku, kterou lze užít k trisekci úhlu. Teprve ve spojení se jménem objevitele, se jedná o konkrétní křivku.

[16] S ohledem na naše zvyklosti uvažuji čtverec $ABCD$ popsaný proti směru hodinových ručiček. Křivku lze uvažovat i v transformovaném čtverci $ABCD$, jak je uvedeno např. v [Tho80a, str. 336] (viz obr. 1).

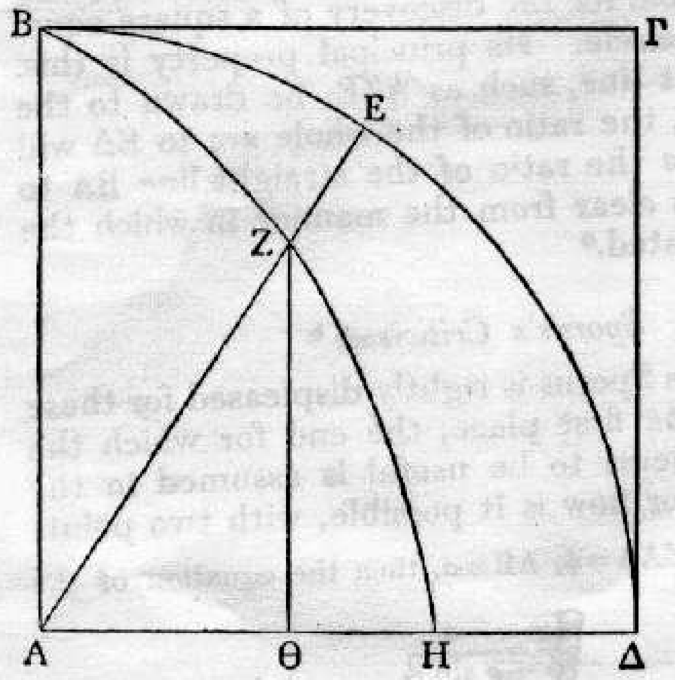
(ii.) *The Quadratrix*

Papp. *Coll.* iv. 30. 45–32. 50, ed. Hultsch 250. 33–258. 19

Construction of the Curve

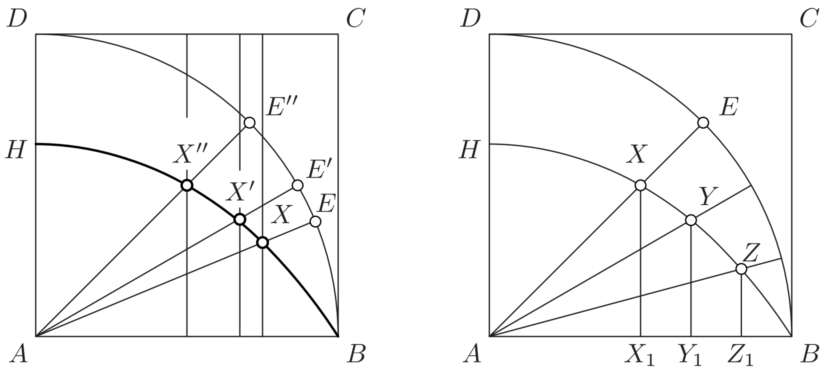
λʹ. Εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου παρελήφθη τις ὑπὸ Δεινοστράτου καὶ Νικομήδους γραμμὴ καί τινων ἄλλων νεωτέρων ἀπὸ τοῦ περὶ αὐτὴν συμπτώματος λαβοῦσα τοὔνομα· καλεῖται γὰρ ὑπ᾽ αὐτῶν τετραγωνίζουσα καὶ γένεσιν ἔχει τοιαύτην.

Ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ περὶ κέντρον τὸ Α περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΒΕΔ, καὶ



κινείσθω ἡ μὲν ΑΒ οὕτως ὥστε τὸ μὲν Α σημεῖον μένειν τὸ δὲ Β φέρεσθαι κατὰ τὴν ΒΕΔ περι-

Obrázek 1: Popis Hippiovy kvadratrix podle [Tho80a, str. 336]



Obrázek 2: a) Hippiova kvadratrix b) Trisekce úhlu pomocí Hippiovy kvadratrix

S dnešním matematickým aparátem můžeme pro libovolný bod $X[x, y]$ v souřadném systému $\langle A, x, y\rangle$, $x \sim AB$, $y \sim AD$, psát (z definice Hippiovy křivky)

$$|\sphericalangle XAB| : \frac{\pi}{2} = (|AB| - x) : |AB|. \tag{1}$$

Označme $|AB| = a$ a $|\sphericalangle XAB| = t$, přičemž je zřejmé, že $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle EAB|$. Potom

$$t = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{x}{a}), \quad \text{tj. } y = x \cdot \operatorname{tg} t = x \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1 - \frac{x}{a})$$

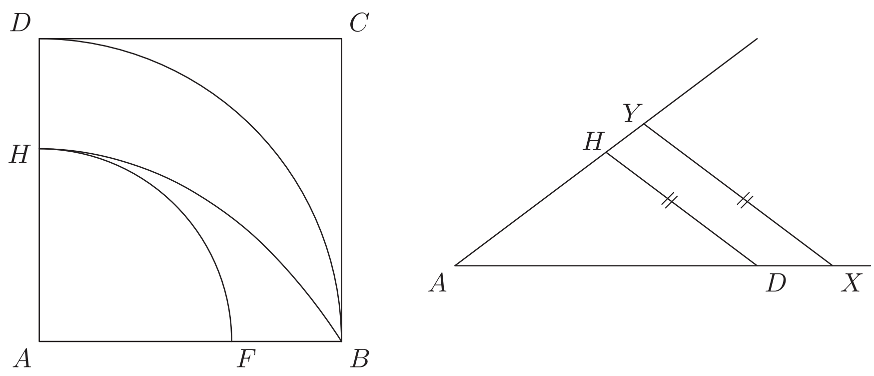
a odtud

$$y = x \cdot \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2a}. \tag{2}$$

Pokud bod X přejde do mezní polohy $X = H$ (pohybující se úsečky AB a BC z definice kvadratrix v této poloze splývají), vyjádříme tuto skutečnost v dnešní terminologii opět snadno

$$y = \lim_{x \longrightarrow 0}\left(x \cdot \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2a}\right) = \frac{2a}{\pi}. \tag{3}$$

Z (2) je ihned vidět, že tato křivka má nekonečně mnoho větví a (3) ukazuje souvislost mezi kvadratrix a kvadraturou kruhu. Tohle však pochopitelně nebyl pohled starověkých Řeků. Ve starověku nebyl používán žádný symbolický zápis či rovnice, avšak už Deinostratos přišel na to, že Hippiovu kvadratrix lze užít ke kvadratuře



Obrázek 3: a), b) Rektifikace kružnice pomocí Hippiovy kvadratrix

kruhu. Deinostratos neužil limitního přechodu, ale metodou nepřímého důkazu dokázal, že oblouk $\widehat{BD}$ je s úsečkami AH, AD (obr. 3 a) v následujícím vztahu[17]

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AD}{\widehat{BD}}. \tag{4}$$

Z podobnosti kružnic obdržíme

$$\frac{AH}{AD} = \frac{\widehat{FH}}{\widehat{BD}}, \tag{5}$$

odsud a z (4) $AD = \widehat{FH}$.

Z uvedeného plyne snadná rektifikace libovolné kružnice. Máme–li zkonstruovanou kvadratrix, naneseme na ramena libovolného úhlu α délky AH a AD a platí (obr. 3 b): čtvrtkružnice o poloměru AY je rovna délce úsečky AX.

Zdaleka ne všichni učenci však byli s takovými metodami srozuměni. Např. užití kvadratrix jako praktické metody pro kvadraturu kruhu ostře kritizoval Sporus[18] (viz tabulka 1).

Zdůrazněme na závěr, že Řekové vyšetřovali jen omezenou část jedné větve křivky. To, že takto definovaná kvadratrix je součástí křivky, která má nekonečný

τεῖται δὲ αὐτῇ ὁ Σπόρος εὐλόγως
ῦτον μὲν γὰρ πρὸς ὃ δοκεῖ χρειώδης
τοῦτ' ἐν ὑποθέσει λαμβάνει. πῶς
ύο σημείων ἀρξαμένων ἀπὸ τοῦ B

μὲν κατ' εὐθείας ἐπὶ τὸ A, τὸ δὲ
ίας ἐπὶ τὸ Δ ἐν ἴσῳ χρόνῳ συν-
ι[1] μὴ πρότερον τὸν λόγον τῆς AB
τὴν BEΔ περιφέρειαν ἐπιστάμενον;
τῷ λόγῳ καὶ τὰ τάχη τῶν κινήσεων
ἐπεὶ πῶς οἷόν τε συναποκαταστῆναι
οις χρώμενα, πλὴν εἰ μὴ ἂν κατὰ
ιμβῇ· τοῦτο δὲ πῶς οὐκ ἄλογον;

31. Sporus oprávněně není potěšen tímto výsledkem. Zaprvé závěr, pro který se konstrukce zdá být užitečná je předpokládán jako hypotéza. Proto jak je možné se dvěma body začít pohybovat z B, s jedním z nich podél přímky do bodu A a s druhým podél kružnice do Δ ve stejném čase, pokud neznáme poměr délek úsečky AB a oblouku BEΔ? K tomu je nezbytné, aby rychlosti pohybujících se bodů byly v tomto poměru. A jak by pak bylo možné použitím nepřizpůsobené rychlosti vést pohyby společně do konce, aniž bychom je mohli občas změnit?

Tabulka 1: Sporus – kritika užití Hippiovy kvadratrix jako praktické metody pro kvadraturu kruhu (z Pappova díla *Sbírka (Synagoge)* podle Thomase [Tho80a, str. 338–341]).

počet větví, bylo ukázáno teprve v roce 1650.

4. Kuželosečky

Další křivky, které se objevují (kromě kružnice a přímky) po Hippiově kvadratrix, jsou ***kuželosečky***. Okolnosti kolem jejich původu nejsou úplně jasné. Jejich objevení s největší pravděpodobností souviselo s problémem zdvojení krychle.

Přibližně v 5. století př. Kr. Hippokrates z Chiu redukoval tento problém na problém nalezení dvou středních geometrických úměrných.[19] V naší dnešní terminologii bychom jeho úvahu vyjádřili přibližně takto: Nechť a je hrana krychle. Je třeba najít x, y tak, aby platilo

$$a : x = x : y = y : 2a, \tag{6}$$

tj. aby platily kterékoliv dvě z následujících rovnic

$$x^2 = ay, \;\; y^2 = 2ax, \;\; xy = 2a. \tag{7}$$

Vyloučením y obdržíme $x^3 = 2a^2$, tedy x je hrana hledané krychle.

Od Eutokia[20] se dozvídáme, že kolem roku 350 př. Kr. Menaichmos jako první nalezl dva způsoby řešení – průsečík dvou parabol a průsečík paraboly s rovnoosou hyperbolou. Ukázal, že průsečík těchto křivek dává očekávané hodnoty x, y, a řeší problém zdvojení krychle. Není přesně známo, jak tyto křivky Menaichmos sestrojil. Ačkoliv kompletně nelze zkonstruovat tyto křivky eukleidovsky, jednotlivé body zkonstruovat můžeme. Popišme stručně Menaichmovu myšlenku. Uvažujme v rovině dvě vzájemně kolmé přímky p, q. Jejich průsečík označme S (obr. 4). Dále uvažujme veličinu $a = |SA_1|$. Nechť $2a = |SA_2|$, $A_1 \in p$, $A_2 \in q$. Uvažujme bod Q pohybující se z bodu S ve směru opačném k polopřímce SA_2. K tomuto bodu Q existuje právě jediný bod T tak, že $\sphericalangle A_1QT$ je pravý, a právě jediný obdélník $SQUT$. Z podobnosti trojúhelníků A_1SQ a QST obdržíme

$$\frac{SA_1}{SQ} = \frac{SQ}{ST}$$

tj.

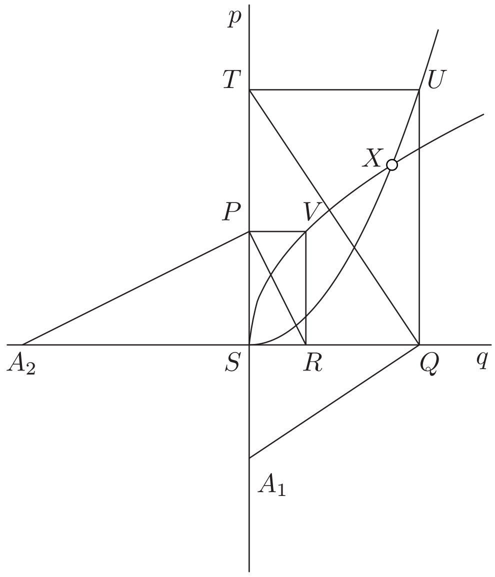
$$SQ^2 = ST \cdot SA_1. \tag{8}$$

[17]Přičemž Deinostratos vyloučil případy, kdy by geometrická úměrná byla splněna pro bod $Y \in AD$, $Y \neq H$. Podrobný postup např. v [Tho80a, str. 343]. Jedná se o historicky první příklad užití nepřímého důkazu (viz [Kol68, str. 103]).

[18]Sporus (3. století po Kr.).

[19]Obecně problém nalezení dvou středních geometrických úměrných značí nalézt ke dvěma daným veličinám a, b veličiny x, y tak, aby platilo $a : x = x : y = y : b$.

[20]Eutokius z Askalonu (5. stol. př. Kr.).



Obrázek 4: Kuželosečky

Obdobnou úvahu provedeme pro bod P pohybující se po přímce p (obr. 4). Potom

$$SP^2 = SR \cdot SA_2. \tag{9}$$

Odtud plyne, že pohybuje–li se bod Q po přímce q a bod P po přímce p, pak se body U, V pohybují po parabolách (8), (9). V souřadném systému $\langle S, x, y\rangle$, $x \sim q$, $y \sim p$, $U = [u_1, u_2]$, $V = [v_1, v_2]$ můžeme vyjádřit tyto paraboly jako

$$a : u_1 = u_1 : u_2, \qquad \text{tj.} \quad u_1^2 = a \cdot u_2, \tag{10}$$

$$2a : v_2 = v_2 : v_1, \qquad \text{tj.} \quad v_2^2 = 2a \cdot v_1. \tag{11}$$

Průsečík parabol označme $X = [x, y]$. Potom (viz obr. 4)

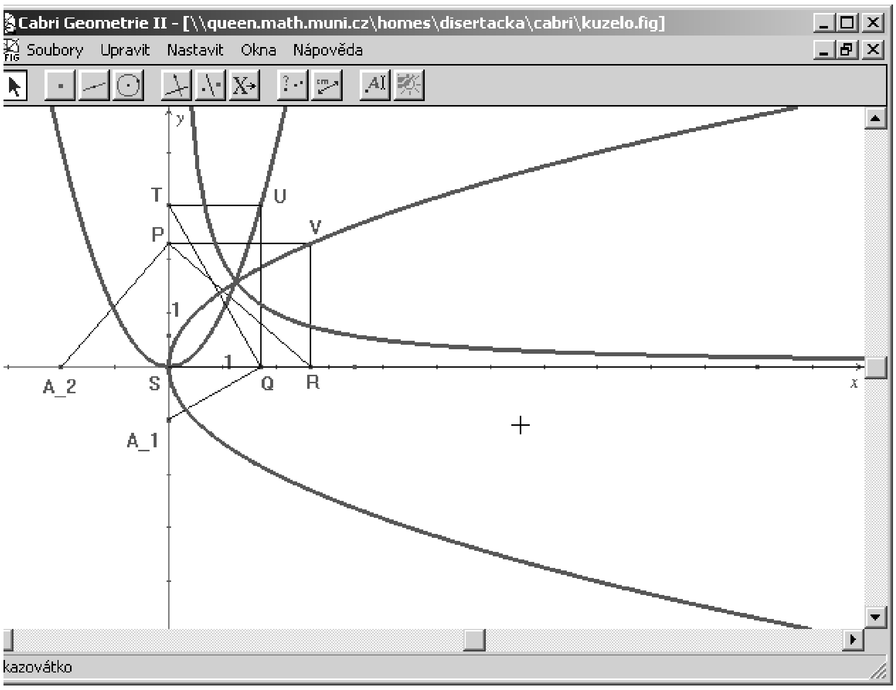
$$a : x = x : y, \qquad \text{tj.} \quad x^2 = a \cdot y, \tag{12}$$

$$2a : y = y : x, \qquad \text{tj.} \quad y^2 = 2a \cdot x. \tag{13}$$

Snadno lze ukázat, že bod X leží také na hyperbole $xy = 2a$ s asymptotami p, q (viz obr. 5).

Odtud plyne, že jsou splněny podmínky (7) a uvedeným postupem můžeme ke každé veličině a najít veličiny x, y tak, aby platily vztahy (6). Konstrukce však nebude obecně eukleidovská. Veličiny x, y lze najít např. mechanicky pomocí nástroje, který prý na základě Menaichmovy úvahy sestrojil Platon.[21] O tom, jak přišli Řekové na to, že křivky objevené při řešení problému zdvojení krychle lze obdržet jako

[21] Toto tzv. Platonovo řešení nepatří s největší pravděpodobností Platonovi, ale některému Menaichmovu součastníku či pozdějšímu matematikovi. Viz např. [Kol68, str. 111], [Tho80a, str. 262].



Obrázek 5: Způsob nalezení kuželoseček podle Menaichmose demonstrovaný v Cabri Geometrii

řezy na kuželi, můžeme dnes jen spekulovat.[22] Zajímavé je, že Menaichmos kuželosečky obdržel jako rovinné řezy rotačního kužele, přičemž rovina řezu byla vždy kolmá k vytvořující přímce. Jednotlivé typy kuželoseček obdržel změnou vrcholového úhlu kužele a odtud se také nazývaly sečnami ostrého, pravoúhlého a tupého kužele. Tento přístup přetrval až do Apollónia. S největší pravděpodobností znali Řekové elipsu také jako řez rotačního válce.

Ještě ve 4. století byla napsána dvě obsáhlá pojednání, v nichž byly uvedeny kuželosečky popsaným způsobem. Ačkoliv nebyla nalezena, můžeme si udělat částečnou představu o jejich obsahu podle Archimedových odkazů na základní věty o kuželosečkách. Na obě práce upozorňuje Pappos.

Aristaeus[23] napsal 5 knih týkajících se *solid loci* (řecký termín pro kuželosečky). Druhé pojednání napsal autor proslulých *Základů* Eukleides z Alexandrie. Pravděpodobně

…v tomto pojednání, které se skládá ze čtyř knih, Eukleides uspořádal a možná i doplnil před ním nahromaděné znalosti o tomto předmětu v rozsahu prvních tří Apollonióvých knih. [Kol68, str. 141]

[22]Např. Neugebauer se domnívá, že Menaichmos byl přiveden k jejich objevu slunečními hodinami. Viz [Neu49, str. 124].

[23]Aristaeus (Aristaios) z Elder (370–300 př. Kr.)

V *Základech* není teorie kuželoseček vyložena, i když byla tehdy již bezesporu rozpracována, neboť se nedá vyložit na základě eukleidovských konstrukcí. Ve dvou zmíněných pracích byly kuželosečky uvedeny bez jakéhokoliv využití. Základní věty o kuželosečkách uvádí až Archimedes.[24]

Apollóniův spis *O kuželosečkách*

Nejvýznamější spis o kuželosečkách a po Eukleidových *Základech* nejznámější dílo řecké matematiky – *O kuželosečkách* pochází od Apollónia.[25] Sestává z 8 knih, z nichž první čtyři se dochovali v řečtině, další tři v arabském překladu[26] a poslední byla ztracena.

Z Apollóniových zmínek Eukleida, Conona ze Samu[27] a Nikotela z Kyrenu je zřejmé, že znal práce těchto svých předchůdců a používal je. Knihy I–IV obsahují systematický výklad základních vlastností kuželoseček, které z větší části dříve vyložil už Eukleides, Aristaeus a Menaichmos. Ale zatímco až do Apollónia se tři typy kuželoseček získávaly z různých typů kolmých kruhových kuželů, Apollónios je všechny získává z libovolného kruhového kužele bez ohledu na to, zda je přímý nebo kosý, proto mohl zavést dodnes používané názvy elipsa, hyperbola a parabola. Jeho předchůdci tyto křivky nazývali sečnami ostroúhlého, pravoúhlého a tupoúhlého kužele. Některé věty v knize třetí a velká část knihy čtvrté jsou nové. Knihy V–VII jsou nepochybně originální. Pátá kniha se liší od ostatních jak obsahem, tak i způsobem výkladu a znatelně předstihla svou dobu.[28] Apollónios zde vede ke kuželosečkám z různých bodů normály a zkoumá je jako přímky maximální či minimální. Uvažuje i o bodech, které dnes nazýváme *středy křivosti*, a o evolutách. V šesté knize se zabývá řezy shodnými a podobnými na dvou kolmých podobných kuželích. V sedmé knize zkoumá Apollónios tětivy rovnoběžné se sdruženými průměry. Tato kniha byla přípravou pro ztracenou knihu osmou.

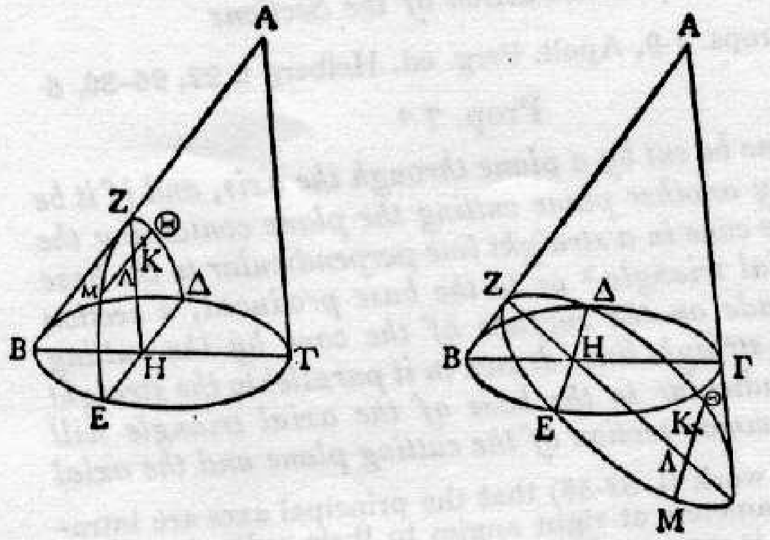
5. Dioklova Kisoida

Podle úryvků z Dioklovy[29] nedochované práce *O zápalných zrcadlech*, které známe z Eutokiových komentářů k Archimedovu dílu *O kouli a válci*,[30] užil ve 2. stol. př. Kr. Diokles k nalezení dvou středních geometrických úměrných křivku, která dostala

[24] Archimedes ze Syrakus (287–212 př. Kr.).
[25] Apollónios z Pergy (260–180 př. Kr.).
[26] Viz [Apo90].
[27] Conon ze Samu (280–220 př. Kr.).
[28] Viz [Kol68, str. 165].
[29] Diokles (cca 240–180 př. Kr.), současník Apollónia.
[30] Viz [Tho80a, str. 271].

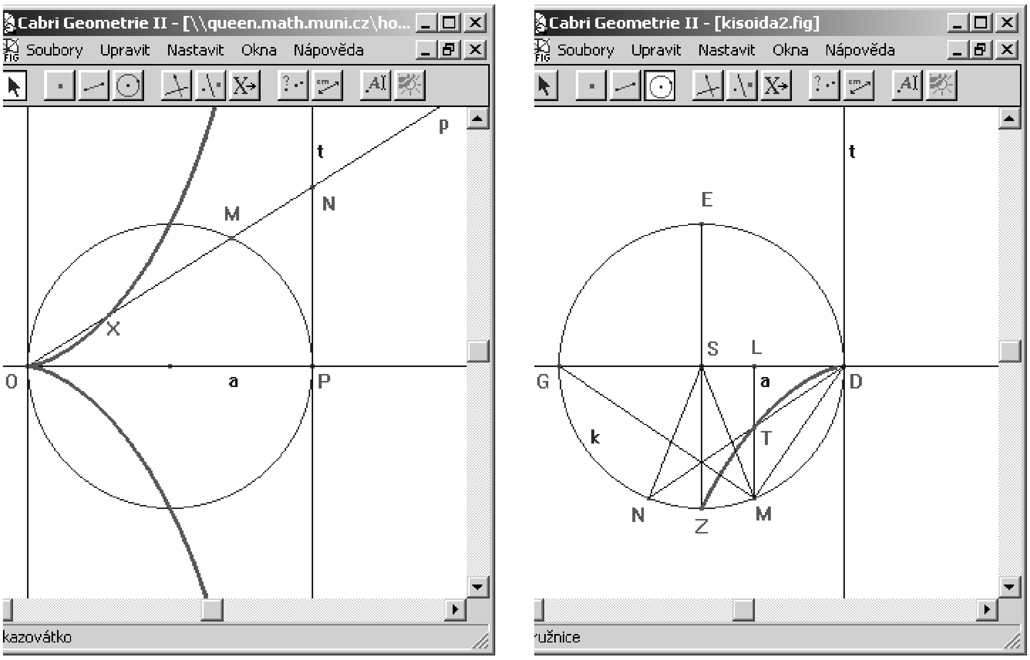
νοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπ' αὐτῆς, καὶ ἐὰν μὲν ὀρθὸς ᾖ ὁ κῶνος, ἡ ἐν τῇ βάσει εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἐὰν δὲ σκαληνός, οὐκ αἰεὶ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἀλλ' ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κώνου.

Ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ



τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΒΓ κύκλος, κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΕ ἤτοι πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ· κοινὴ δὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ ΖΗ. καὶ

Obrázek 6: Ukázka z Apollóniova spisu *O kuželosečkách*, [Tho80a, str. 290] název ***kisoida***.[31] Dnes je kisoida většinou definována následovně: Nad průměrem



(a) Křivka zadaná rovnicí (14) (b) Dioklova konstrukce

Obrázek 7: Dioklova kisoida v Cabri Geometrii

$OP = 2a$ sestrojíme kružnici k a v bodě P její tečnu t (obr. 7(a)). Z bodu O vedeme polopřímku p protínající kružnici k. Označme $M = p \cap k$, $N = p \cap t$. Kisoida je potom množina všech bodů $X \in \mapsto p$, jejichž vzdálenost od bodu O je rovna $|MN|$. V souřadném systému $\langle O, x, y \rangle$, $x \sim OP$, $y \sim$ tečna ke kružnici v bodě O, má kisoida rovnici

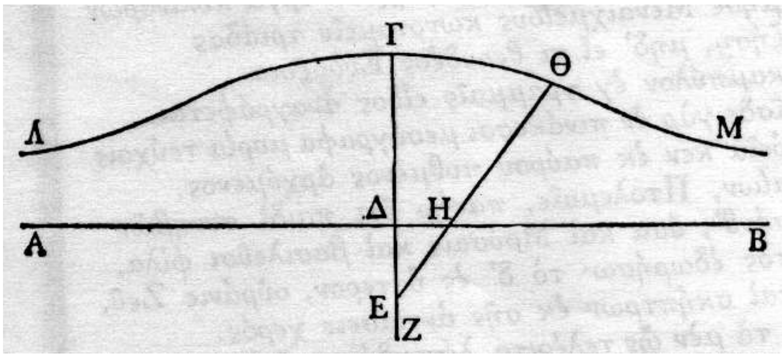
$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \qquad (0 \le x \le 2a). \tag{14}$$

Nyní popišme Dioklovu konstrukci.[32] Uvažujme kružnici $k(S, r = a)$ se dvěma k sobě kolmými průměry GD, ZE (obr. 7(b)), v ní dva shodné úhly NSZ, ZSM. Sestrojme $ML \parallel ZS$ a spojme body DN. Označme $T = ML \cap DN$. Bod T leží na křivce jdoucí z bodu D do bodu Z. (Jinou volbou úhlů NSZ, ZSM obdržíme další body. Analogicky zkonstruujeme druhou větev.) Není těžké odvodit z podobnosti trojúhelníků TLD, DLM a MLG, že platí

$$TL : LD = DL : LM = ML : LG, \tag{15}$$

[31] Z řeckého κισσοειδης γραμμη – *podobná břečťanu.*

[32] Podle Eutokia v [Tho80a, 271]. Kolman bez odkazu na zdroj zavádí kisoidu způsobem popsaným výše [Kol68, 162].



Obrázek 8: Nikomedova konstrukce konchoidy, [Tho80a, str. 299]

tj. při označení $TL = a$, $DL = x$, $ML = y$ a $GL = b$ (ve speciálním případě $b = 2a$) obdržíme známé vztahy pro dvě střední geometrické úměrné. Abychom obdrželi rovnici (14), museli bychom zvolit v obrázku 7(b) souřadný systém $\langle D, x, y\rangle$, $x \sim GD$, $y \sim ZE$, kde navíc kladný směr osy x odpovídá polopřímce DG. Diokles i další řečtí geometři, kteří se po něm kisoidou zabývali, vyšetřovali pouze část křivky uvnitř kružnice. Jak použil Diokles kisoidu k nalezení veličin x, y k dané veličině a tak, aby byly splněny vztahy (6), je uvedeno v tabulce 2.

Poznamenejme, že Dioklova kisoida patří z dnešního pohledu mezi algebraické křivky třetího stupně a zabývali se jí zejména učenci sedmnáctého století.

6. Nikomedova konchoida

V Eutokiových komentářích Archimedova díla *O kouli a válci*[33] se dovídáme, že Nikomedes[34] ve své knize *O konchoidách* ke stanovení dvou středních geometrických úměrných užil křivku, kterou sám popsal. Původně křivku pravděpodobně nazval ***kochloida***,[35] tak ji nazývá Pappos (3. stol.). Teprve později dostala zřejmě název ***konchoida***[36] – Proklos (5. stol.). Nikomedes sestrojil tuto křivku zvláštním přístrojem, který sám vynalezl. Od Eutokia se dovídáme, že Nikomedes se svým objevem velice pyšnil a vysmíval se Eratostenovu objevu jako nepraktickému a pro geometrii nevhodnému.[37]

Popišme velice stručně Nikomedovu konstrukci. Uvažujme dvě navzájem kolmé úsečky AB, GZ, jejich průsečích označme D (obr. 8). Nechť bod E leží mezi body ZD

[33] Viz [Tho80a, 296].
[34] Nikomedes (2. stol. př. Kr.).
[35] Kochloida – tvaru kochlei (druh ryby, řecky κοξλος).
[36] Konchoida – tvaru škeble.
[37] Eratostenes určil dvě střední geometrické úměrné rovněž mechanicky pomocí přístroje zvaného „mezolabon“ [Kol68, str. 160].

ιτεσκευασμένων ἔστωσαν αἱ δο-

ειαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον
, καὶ ἔστω κύκλος, ἐν ᾧ δύο διά-
ρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΓΔ, ΕΖ, καὶ
ὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων
οείρηται, ἡ ΔΘΖ, καὶ γεγονέτω,
τὴν Β, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐπι-
Κ καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν
τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ ΕΖ παράλ-
ΛΜ· διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα
μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΜΛ, ΛΔ.
ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΘ, οὕτως ἡ ΓΗ
ὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ Α πρὸς
ῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς ΓΛ, ΛΜ, ΛΔ,
μεν μέσας τῶν Α, Β, ὡς τὰς Ν,
μμέναι τῶν Α, Β μέσαι ἀνάλογον
ει εὑρεῖν.

Na základě připravené konstrukce, nechť dvě úsečky, mezi kterými je požadováno najít dvě střední úměrné, jsou A, B, a nechť je dána kružnice, ve které ΓΔ, EZ jsou dva průměry vzájemně k sobě kolmé, nechť je sestrojena křivka ΔΘZ výše popsaným způsobem a nechť $\mathrm{A} : \mathrm{B} = \Gamma\mathrm{H} : \mathrm{HK}$, a nechť ΓK jsou spojeny, a nechť přímka je spojující je prodloužena dokud neprotne křivku v Θ, a skrze Θ, nechť ΔM je sestrojena rovnoběžně k EZ; potom podle toho, co bylo napsáno v předchozím MΛ, ΛΔ jsou střední geometrické úměrné mezi ΓΛ, ΛΘ. A odtud $\Gamma\Lambda : \Lambda\Theta = \Gamma\mathrm{H} : \mathrm{HK}$ a $\Gamma\mathrm{H} : \mathrm{HK} = \mathrm{A} : \mathrm{B}$, jestliže mezi A, B umístíme N, Ξ se stejným poměrem jako ΓΛ, ΛM, ΛΔ, ΛΘ (tj. jestliže vezmeme $\Gamma\Lambda : \Lambda\mathrm{M} = \mathrm{A} : \mathrm{N}$, $\Lambda M : \Lambda\Delta = N : \Xi$ a $\Lambda\Delta : \Lambda\Theta = \Xi : B$), potom N, Ξ budou střední geometrické úměrné mezi A, B, které měly být nalezeny.

Tabulka 2: Nalezení dvou středních geometrických úměrných užitím Dioklovy kisoidy podle Eutokia (úryvek Dioklova díla *O zápalných zrcadlech* v Eutokiových komentářích Archimedova díla *O kouli a válci* podle Thomase [Tho80a, 276]).

a úsečka GZ se pohybuje tak, že je upevněna v bodě E, stále protíná úsečku AB a vzdálenost DG se zachovává, tj. délka DG na obr. 8 je ekvivalentní délce HT. Potom bod G opíše křivku LGM. Nikomedes dokázal, že mezi všemi úsečkami kolmými k LGM, jejichž krajní body budou ležet na LGM a AB, je nejdelší právě úsečka DG z obr. 8. Kromě Nikomeda ukazuje použití konchoidy pro nalezení dvou středních geometrických úměrných také sám Pappos, obdobně i Eutokios.[38] Konchoida byla také užívána k trisekci úhlu.[39] V 17. století její konstrukci znovu popisuje Descartes.

Z dnešního pohledu je Nikomedova konchoida algebraická křivka čtvrtého stupně, tj. množina všech bodů $X = [x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici

$$(x - a)^2 \cdot (x^2 + y^2) - b^2 x^2 = 0. \tag{16}$$

Pod pojmem *konchoidy* se dnes rozumí obecnější křivky, které se dostanou zmenšením nebo zvětšením průvodiče každého bodu dané křivky, nikoliv nutně přímky jako je tomu v případě Nikomedovy konchoidy.

7. Archimedova spirála

Archimedes ze Syrakus byl člověkem, který své znalosti užíval v praxi. Z hlediska našeho zájmu o křivky upoutá mezi jeho zachovanými pracemi spis *Kvadratura paraboly.* Archimedes zde ještě používá pro parabolu název „řez pravoúhlého kužele“. Stanovuje velikost plochy parabolické výseče vyťaté tětivou. Práce je nesmírně zajímavá pro historii matematické analýzy svojí metodou příbuznou metodě výpočtu určitého integrálu. K tématu křivek však nepřináší nic.

O to zajímavější je vzhledem ke stanovenému tématu Archimédova pozdější práce *O spirálách*. Skládá se z 28 vět. Archimedés zde podává definici spirály jako čáry opisované bodem rovnoměrně se pohybujícím po přímce, zatímco se tato přímka rovnoměrně otáčí v rovině kolem jednoho pevného bodu, který na ní leží (viz tab. 3). V dnešní symbolice bychom rovnici Archimedovy spirály v polárních souřadnicích vyjádřili jako $r = a \cdot t$, kde r je délka průvodiče a t příslušný úhel. Archimedes používá v geometrii pohyb, ale jen k definici nových geometrických objektů nikoliv k důkazům.[40] Archimedes mimo jiné ukazuje (obr. 9), že délka polární subtangenty OT (tj. úseku na kolmici OT k průvodiči OP, ležícím mezi pólem O a tečnou PT) je rovna délce kruhového oblouku AP.[41]

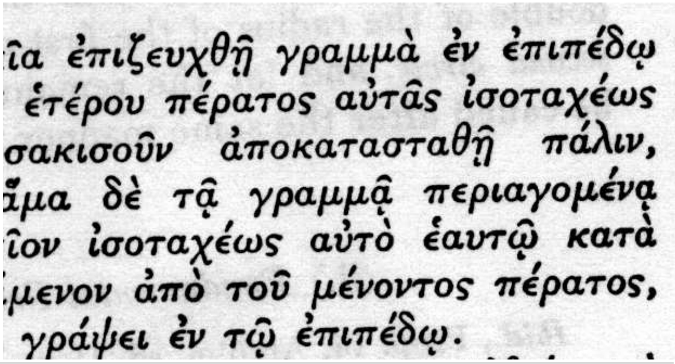
---

[38] Podrobněji v [Tho80a, str. 304].

[39] Podrobněji v [Tho80a, str. 301].

[40] V roce 1899 byl objeven pergamen z 10. století, který byl částečně ve 13. století smyt a přepsán náboženským textem [Kat98, 111]. Heiberg jej prozkoumal a následně vydal v roce 1906. V tomto pojednání nazvaném *O metodě* Archimedes vysvětluje, jak došel k některým větám:
Mnohé, co jsem dříve objasnil „mechanicky“, jsem potom dokázal geometricky, neboť moje úvahy založené na této mechanické metodě neměly ještě průkaznosti důkazů, lehčí je ovšem najít důkazy, když si mechanickou metodou vytvoříme představu o zkoumané otázce, než to udělat bez takových předběžných představ. Viz [Kli14, str. 414].

[41] Viz [Kol68, str. 151].

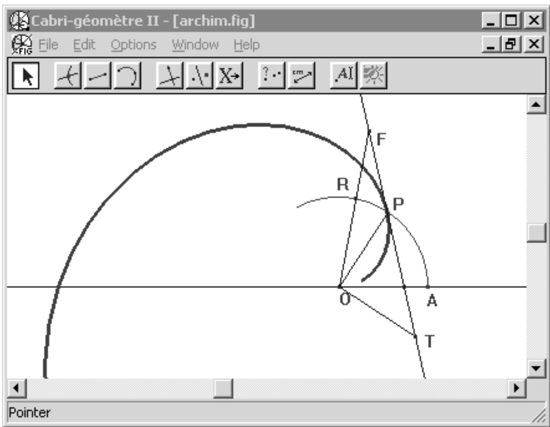


ῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ
ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως
σακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν,
ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ
ῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ
μενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος,
γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

1. Jestliže se úsečka v rovině otáčí rovnoměrně za libovolný čas kolem pevně zafixovaného krajního bodu dokud nedojde do výchozí pozice, a jestliže se, současně s otáčením, rovnoměrně pohybuje bod od zafixovaného konce podél této úsečky, pak tento bod opisuje ***spirálu*** v rovině.

Tabulka 3: Archimedova definice spirály podle Thomase [Tho80b, str. 182]).

Polární osu spirály OA Archimedes nazývá $\alpha\rho\chi\alpha\ \tau\eta\varsigma\ \pi\epsilon\rho\iota\varphi o\rho\alpha\varsigma$[42] – počáteční [čára] pohybu. Kolman bez konkrétního odkazu uvádí „základní čára“.[43] Tím je možno užít Archimedovu spirálu k rektifikaci kružnice. Dále ukazuje Archimedes také např. výpočet obsahu plochy, kterou křivka opisuje atd.



Obrázek 9: Archimedova spirála

[42] Viz [Tho80b, str. 182]
[43] Viz [Kol68, str. 151].

Literatura

[Apo90] Apollónius z Pergy. *Apollonius Conics Books V to VII (The Arabic Translation of the Lost Greek Original in the Version of the Banú Músa).* Springer-Verlag, New York, 1990. (překlad do angličtiny a komentáře G. J. Toomer).

[Beč02] Bečvářová, M. *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, svazek 20 v *Dějiny matematiky.* Prometheus, Praha, 2002.

[Coo40] Coolidge, J. L. *A History of Geometrical Methods.* Oxford, 1940.

[Des37] Descartes, R. *The geometry of Rene Descartes.* Leiden, 1637. (z francouzštiny a latiny přeložil do angličtiny David Eugene Smith a Marcia L. Latham, Chicago 1925; přetisk: Dover Publications, New York, 1954).

[Far50] Farrington, B. *Věda ve starém Řecku a její význam pro nás I. Od Thaleta k Aristotelovi.* Rovnost, Praha, 1950.

[Fuc93] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Historie matematiky I*, svazek 1 v *Dějiny matematiky.* JČMF, Praha, 1993.

[Gel04] Geldard, R. G. *Esoterické Řecko.* Eminent, Praha, 2004. (přeložil Souček J.).

[Gra94] Grattan–Guinness, I., ed. *Companion Encyklopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* Routledge, London, 1994.

[Hei33] Heidel, W. A. *The Heroic Age of Science.* Washington, 1933.

[Hra98] Hradečný, P.–Dostálová, R. *Dějiny Řecka.* Lidové noviny, 1998.

[Kli14] Kliem, F. *Archimedes' Werke.* Berlin, 1914.

[Koč03] Kočandrlová, M. O kružnici. *Učitel matematiky*, 1, 10–16, 2003.

[Kat98] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction.* Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[Kol68] Kolman, A. *Dějiny matematiky ve starověku.* Academia, Praha, 1968.

[Neu49] Neugebauer, O. The astronomical origin of the theory of conic section. *Isis*, 40, 124, 1949.

[Sar93] Sarton, G. *Ancient Science Through The Golden Age Of Greece.* Dover Publications, Inc., New York, 1993. 1. vydání 1952, The Harvard University Press, Cambridge.

[Ser07] Servít, F. *Eukleidovy Základy (Elementa).* Nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1907.

[Str63] Struik, D. J. *Dějiny matematiky.* Praha, 1963. (z angl. originálu A Concise History of Mathematics, G. Bell and Sons Ltd., London, 1956, přeložili Nový, L.-Folta, J.).

[Svo73] Svoboda, L., ed. *Encyklopedie antiky.* Academia, Praha, 1973.

[Tho80a] Thomas, I. *Greek Mathematics (From Thales To Euclid)*, svazek 1. Harvard University Press, London, 1939 (reprinted 1951, 1957, 1968, 1980).

[Tho80b] Thomas, I. *Greek Mathematics (From Aristarchus to Pappus)*, svazek 2. Harvard University Press, London, 1941 (reprinted 1951, 1957, 1968, 1980).

[Vit79] Vitruvius. *Deset knih o architektuře.* Svoboda, Praha, 1979.

[Vop89] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií.* Academia, Praha, 1989.