Užití Jensenovy nerovnosti

S algebraickými nerovnostmi se setkáváme ve většině matematických teorií, ale i v mnoha oborech mimo matematiku. Jednou z metod jejich řešení, při které si vystačíme se středoškolskou matematikou, je využití tzv. Jensenovy nerovnosti. Ta je jedním z nejvýznamnějších vztahů v teorii algebraických nerovností. Většinu klasických nerovností z ní totiž můžeme odvodit a zároveň s její pomocí elegantně vyřešit celou řadu algebraických úloh. Má následující tvar:

Nechť funkce f je definovaná na intervalu I. Je-li funkce f konvexní na I, pak pro libovolnou konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ jakýchkoliv čísel $x_1, \ldots, x_n \in I$ platí nerovnost

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \tag{1}$$

K uvedené definici poznamenejme, že konvexní kombinací čísel $x_1, \ldots, x_n$ rozumíme takové číslo $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, kde koeficienty λ_i splňují tyto podmínky:

$$\lambda_i \geq 0 \, (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{a} \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

Jak vidíme, hlavním předpokladem pro využití Jensenovy nerovnosti je pojem konvexní funkce. To je taková funkce, jejíž graf leží nad tečnou sestrojenou v jejím libovolném bodě. Funkce s opačnou vlastností se nazývá konkávní a platí, že je-li funkce f konvexní na intervalu I, pak funkce $(-f)$ je konkávní na intervalu I a naopak. To, zda je daná funkce na daném intervalu konvexní či konkávní, můžeme určit pomocí diferenciálního počtu. Pro funkce mající druhou derivaci totiž platí, že konvexní (konkávní) na daném intervalu I jsou právě ty funkce f, které $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pro každé $x \in I$.

Máme-li tedy ověřit danou nerovnost a dokážeme-li k ní najít vhodnou funkci f, jejíž průběh známe, a dále vhodné koeficienty λ_i, můžeme úkol splnit právě s využitím Jensenovy nerovnosti.

Nejdříve ukažme, jak lze z Jensenovy nerovnosti odvodit některé klasické nerovnosti patřící k základům celé teorie algebraických nerovností.

AG-nerovnost

Pro libovolná nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\,. \tag{2}$$

Pokud je x_i nulové pro některé $i = 1, \ldots, n$, je nerovnost (2) zřejmá, neboť její pravá strana je rovna nule. Předpokládejme tedy, že $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Funkce $f(x) = \ln x$ je konkávní na $\mathbb{R}^+$, neboť $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$, a proto z Jensenovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}
\ln\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\right) &\geq \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \cdots + \lambda_n \ln x_n,\\
\ln \frac{1}{n}x_1 + \ln \frac{1}{n}x_2 + \cdots + \ln \frac{1}{n}x_n &\geq \frac{1}{n}\ln x_1 + \frac{1}{n}\ln x_2 + \cdots + \frac{1}{n}\ln x_n,\\
\ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &\geq \ln\left(x_1^{\frac{1}{n}} \cdot x_2^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\frac{1}{n}}\right),\\
\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},
\end{aligned}$$

což je nerovnost (2).

Youngova nerovnost

Pro libovolnou dvojici čísel $x > 0$, $y > 0$ a pro libovolná reálná čísla $p > 0$, $q > 0$, pro něž je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, platí

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\,. \tag{3}$$

Nerovnost (3) plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(u) = \ln u$ (která je na $\mathbb{R}^+$ konkávní, neboť $f''(u) = -\frac{1}{u^2} < 0$ pro každé $u > 0$):

$$\ln\left(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2\right) \geq \lambda_1 \ln u_1 + \lambda_2 \ln u_2\,.$$

Dosadíme-li do této nerovnosti $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ a $u_1 = x^p$, $u_2 = y^q$, pak nerovnost (3) dostaneme následujícím způsobem:

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q\,,$$

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \ln x + \ln y\,,$$

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \ln(xy)\,,$$

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy\,.$$

Bernoulliova nerovnost

Pro každé reálné číslo $x > -1$ a libovolné kladné reálné číslo $p \neq 1$ platí

$$(1+x)^p \geq 1 + px \qquad (\text{je-li} \quad p > 1)\,, \tag{4}$$

$$(1+x)^p \leq 1 + px \qquad (\text{je-li} \quad 0 < p < 1)\,. \tag{5}$$

Nejprve předpokládejme, že $p > 1$ a dokažme (4). Pokud bude v nerovnosti (4) platit $1 + px \leq 0$, bude tato nerovnost splněna triviálně. Nechť je tedy pravá strana nerovnosti (4) kladná. Pak po zlogaritmování dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$p\ln(1+x) \geq \ln(1+px)\,.$$

Tato nerovnost však plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \ln x$, konkávní na $\mathbb{R}^+$. S ohledem na $p > 1$ jsou obě čísla $\lambda_1 = \frac{1}{p}$ a $\lambda_2 = 1 - \frac{1}{p}$ kladná a $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, takže můžeme psát

$$\frac{1}{p}\ln(1+px) = \frac{1}{p}\ln(1+px) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\ln 1 \leq$$

$$\leq \ln\left(\frac{1}{p}(1+px) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\cdot 1\right) = \ln(1+x)\,.$$

Tedy

$$\ln(1+x) \geq \frac{1}{p}\ln(1+px)\,,$$

$$p\ln(1+x) \geq \ln(1+px)\,,$$

$$(1+x)^p \geq 1+px\,.$$

V případě $0 < p < 1$ je důkaz nerovnosti (5) obdobný. Využijeme opět Jensenovu nerovnost, tentokrát pro konvexní kombinaci s koeficienty $\lambda_1 = p$ a $\lambda_2 = 1-p$:

$$\begin{aligned} p\ln(1+x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln 1 \leq \\ \leq \ln\big(p(1+x) + (1-p)\cdot 1\big) = \ln(1+px)\,. \end{aligned}$$

Tedy

$$p\ln(1+x) \leq \ln(1+px)\,,$$

$$(1+x)^p \leq 1+px\,.$$

Nerovnost mezi váženým mocninným a váženým geometrickým průměrem

Pro libovolnou n-tici čísel $x_1,\ldots,x_n > 0$, reálné koeficienty $\lambda_i > 0$, pro něž platí $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, a pro libovolné reálné číslo $p > 0$ platí

$$\left(\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}\,. \tag{6}$$

Nerovnost (6) zlogaritmujeme a postupně upravíme

$$\frac{1}{p}\ln\left(\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p\right) \geq \ln\left(x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}\right),$$

$$\ln\left(\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p\right) \geq p\left(\ln x_1^{\lambda_1} + \cdots + \ln x_n^{\lambda_n}\right),$$

$$\ln\left(\lambda_1 x_1^p + \cdots + \lambda_n x_n^p\right) \geq \lambda_1 \ln x_1^p + \cdots + \lambda_n \ln x_n^p\,,$$

Poslední nerovnost však plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \ln x^p$, která je konkávní na $\mathbb{R}^+$, neboť $f''(x) = -\frac{p}{x^2} < 0$ pro všechna $x > 0$.

Z předchozích důkazů je patrné, že Jensenova nerovnost je v teorii algebraických nerovností velmi silným nástrojem. Nyní si ukažme její význam při řešení konkrétních úloh.

Příklad 1. Ukažte, že pro každé reálné číslo $x > 1$ platí nerovnost

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}\,.$$

Řešení. Důkaz této nerovnosti lze snadno provést algebraickými úpravami. My však ověříme její platnost pomocí Jensenovy nerovnosti. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, konvexní na intervalu $(0, \infty)$, neboť $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ pro každé $x > 0$, má Jensenova nerovnost tvar

$$\frac{\lambda_1}{x_1} + \frac{\lambda_2}{x_2} + \frac{\lambda_3}{x_3} \geq \frac{1}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}\,.$$

Odtud pro čísla $x_1 = x - 1$, $x_2 = x$, $x_3 = x + 1$, která jsou kladná a navzájem různá pro každé $x > 1$, a koeficienty $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ dokazovanou nerovnost již snadno získáme:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) &\geq \frac{1}{\frac{1}{3}(x - 1 + x + x + 1)}\,,\\
\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) &\geq \frac{1}{x}\,,\\
\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} &\geq \frac{3}{x}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 2. Ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b \in \langle -1, 1\rangle$ platí

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{4-(a+b)^2}\,.$$

Řešení. Funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ konkávní, což plyne z tvaru jejího grafu, kterým je polokružnice. Z Jensenovy nerovnosti tedy plyne

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1-a^2}}{2} + \frac{\sqrt{1-b^2}}{2} &\leq \sqrt{1 - \frac{(a+b)^2}{4}}\,,\\
\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} &\leq 2\sqrt{\frac{4-(a+b)^2}{4}}\,,\\
\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} &\leq \sqrt{4-(a+b)^2}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 3. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b, pro něž $a+b=1$, platí

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}\,.$$

Řešení. Daná nerovnost plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x)=(x+\frac{1}{x})^2$. Ta je na intervalu $(0,\infty)$ konvexní, neboť $f''(x)=2\left(1+\frac{3}{x^4}\right)>0$ pro každé $x>0$. Platí tedy

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2,$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq 2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{1}\right)^2=\frac{25}{2}\,.$$

Příklad 4. Ukažte, že pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z, pro něž $x+y+z=1$, platí nerovnost

$$64 \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right).$$

Řešení. Uvedený vztah plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci

$$f(t)=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)=\ln(1+t)-\ln(t),$$

která je na intervalu $(0,\infty)$ konvexní, což je zřejmé z výpočtu její druhé derivace:

$$f'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{1}{t}\,,$$

$$f''(t)=-\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{2t+1}{t^2(1+t)^2}>0\,.$$

Jensenovu nerovnost pro funkci f tedy můžeme zapsat takto:

$$\ln\left(1+\frac{1}{\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2+\lambda_3 t_3}\right) \leq \lambda_1 \ln\left(1+\frac{1}{t_1}\right)+\lambda_2 \ln\left(1+\frac{1}{t_2}\right)+\lambda_3 \ln\left(1+\frac{1}{t_3}\right).$$

Dosadíme-li sem kladná $t_1=x$, $t_2=y$, $t_3=z$ a $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}$, dostaneme s ohledem na předpoklad $x + y + z = 1$ postupnými úpravami

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{3}(x+y+z)}\right) \le \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{z}\right),$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{3}}\right) \le \frac{1}{3}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)\right],$$

$$3\ln 4 \le \ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\right],$$

$$64 \le \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right),$$

což je dokazovaná nerovnost.

Příklad 5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \ge 2$ platí

$$(1+n)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} \ge 1\,.$$

Řešení. Funkce $f(x) = \cos x$ je na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ konkávní, což je zřejmé ze známého průběhu jejího grafu. Pro hodnoty $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{n}$ a $\lambda_1 = \frac{1}{n+1}$, $\lambda_2 = \frac{n}{n+1}$ tedy z Jensenovy nerovnosti pro funkci f plyne:

$$\cos\left(\frac{1}{n+1}\cdot 0 + \frac{n}{n+1}\cdot\frac{\pi}{n}\right) \ge \frac{1}{n+1}\cos 0 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi}{n},$$

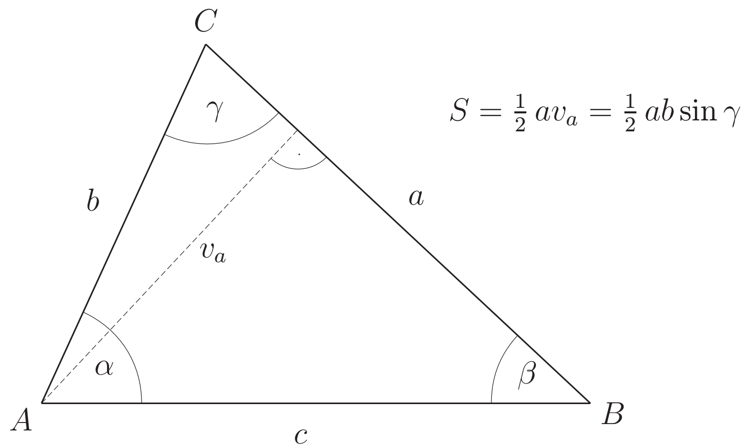
$$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \ge \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi}{n},$$

$$(n+1)\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \ge 1 + n\cos\frac{\pi}{n},$$

$$(1+n)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} \ge 1\,.$$

Příklad 6. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC se stranami délek a, b, c a obsahem S platí

$$ab + ac + bc \ge 4\sqrt{3}\,S\,.$$



Obr. 1

Řešení. Jak je patrné z obr. 5.1, obsah libovolného trojúhelníka lze vyjádřit pomocí dvou stran a úhlu, který tyto strany svírají. Zřejmě tedy platí

$$S = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\,ac\sin\beta = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha,$$

z čehož plynou rovnosti

$$ab = \frac{2S}{\sin\gamma}\,, \quad ac = \frac{2S}{\sin\beta}\,, \quad bc = \frac{2S}{\sin\alpha}\,.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$ab + ac + bc = 2S\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right). \tag{7}$$

Nyní uplatníme Jensenovu nerovnost, a to pro funkci $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Ta je na intervalu $(0,\pi)$ konvexní, jak dokazuje kladná hodnota její druhé derivace:

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2}\,,$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sin x} + 2\,\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0 \qquad \text{pro každé } x \in (0,\pi).$$

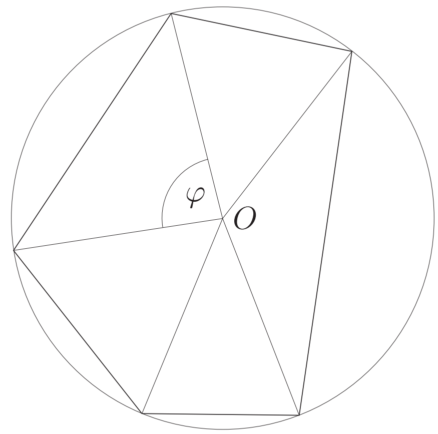
Z Jensenovy nerovnosti tedy plyne

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \geq \frac{3}{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}} = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}\,,$$

takže s využitím rovnosti (7) můžeme psát

$$ab + ac + bc \geq 2S\,\frac{6}{\sqrt{3}} \geq 4\sqrt{3}\,S\,.$$

Příklad 7. Ukažte, že ze všech konvexních n-úhelníků vepsaných do dané kružnice má největší obsah právě pravidelný n-úhelník.



Obr. 2

Řešení. Jistě můžeme uvažovat jen takové vepsané n-úhelníky, které obsahují střed O dané kružnice. Z obr. 5.2 je patrné, že každý takový konvexní n-úhelník se skládá z n rovnoramenných trojúhelníků, které mají společný hlavní vrchol ve středu O. Obsah každého takového n-úhelníka je tedy roven součtu obsahů jednotlivých trojúhelníků. Je-li daná kružnice jednotková, pak pro obsah S každého z nich platí

$$S = \frac{1}{2} \sin \varphi \,,$$

kde φ je úhel při středu O. Obsah A celého n-úhelníka tedy můžeme zapsat:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin \varphi_k \,, \quad \text{kde} \quad 0 < \varphi_k < \pi \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n} \varphi_k = 2\pi.$$

Je dobře známo, že funkce $f(x) = \sin x$ je konkávní na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, a proto z Jensenovy nerovnosti plyne

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin \varphi_k \leq \frac{1}{2}\, n \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \right) = \frac{1}{2}\, n \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) = A' \,,$$

kde A' je zřejmě obsah pravidelného n-úhelníka. A protože rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n$, tedy $\varphi_k = \frac{2\pi}{n}$ pro všechna $1 \leq k \leq n$, je tvrzení o maximálním obsahu pravidelného n-úhelníka dokázáno.