INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklady pro osvojení pojmu reálná čísla

Irena Budínová

Pedagogická fakulta MU

irena.budinova@seznam.cz

Na prvním stupni základní školy se žáci seznamují s pojmem přirozeného čísla. Množina přirozených čísel má velmi příjemné vlastnosti: Je možné ji jednoduše uspořádat, každé číslo má svého bezprostředního následovníka, na konečném intervalu je konečně mnoho přirozených čísel apod. Žáci si velice často myslí, že stejným způsobem se chovají všechny další číselné obory.

Množina racionálních čísel si zachovává některé příjemné vlastnosti, např. racionální čísla lze uspořádat, i když už ne tak snadným způsobem, jako to bylo u přirozených čísel. Avšak na konečném intervalu existuje nekonečně mnoho racionálních čísel.

Vlastnosti reálných čísel jsou pro mnoho žáků zcela nepochopitelné: Žádné číslo nemá svého bezprostředního následovníka, množinu nelze uspořádat, mezi každými dvěma racionálními čísly leží nekonečně mnoho iracionálních čísel. Žáci se na základní škole seznamují s reálnými čísly v podobě některých iracionálních čísel - π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, aj. Je ale také vhodné, aby se žáci seznámili s podstatou reálných čísel. Za tím účelem pokládáme žákům zdánlivě banální otázky, na které však neexistují jednoduché odpovědi. Pokud žákům necháme prostor k diskusi, jsou schopni sami dojít ke správným závěrům a osvojit si tak některé důležité poznatky.

Příklad 1

Které číslo bezprostředně následuje po čísle 1?

Málokteré dítě by pochybovalo o tom, že každé číslo má svého bezprostředního následovníka. Na 1. stupni ZŠ se žáci totiž setkávají s tím, že hned za číslem 1 je číslo 2. Pokud žákům necháme možnost diskutovat, mohou sami přijít na to, že ať vymyslí jakkoli malé číslo následující po 1 (např. 1,0000000000000001), vždy lze vymyslet ještě menší. Tento proces může trvat nekonečně dlouho a následovníka tudíž nenajdeme.

Otázku lze modifikovat – hledat číslo, které bezprostředně předchází různým číslům, nebo zjistit, zda je možné vypsat všechna čísla mezi čísly 1 a 2. Tím je odpověď rozšířena – žádné číslo nemá ani svého bezprostředního předchůdce ani následovníka a mezi dvěma čísly existuje nekonečně mnoho čísel.

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Tyto poznatky jsou velmi důležité pro pochopení uzavřených a otevřených intervalů. Když přijdou žáci ze základní na střední školu, jednou z prvních problematik, se kterou se seznamují, jsou intervaly. Toto učivo je pro mnoho žáků velmi komplikované. Nezřídka se stává, že žáci zaměňují otevřený interval (1;5) za interval $\langle 2; 4\rangle$. Nekonečně mnoho čísel pro ně nehraje žádnou roli. Na tomto případu je vidět, jak velmi silně jsou žáci orientováni na přirozená čísla.

Zajímavé je také vyzkoušet, jakým způsobem odpoví žáci na otázku, kolik je čísel na intervalu, např. $\langle 1; 5\rangle$. První odpověď, která se nabízí, že konečně mnoho. Jde přece o konečný interval. Přirozených čísel je v tomto intervalu konečně mnoho, tak proč by to mělo být u dalších číselných oborů jinak? Když se ale přesuneme do oboru racionálních čísel, můžeme vždy pro jakákoli dvě různá čísla daného intervalu najít jejich aritmetický průměr. Např. $\frac{1+5}{2} = 3, \frac{1+3}{2} = 2, \frac{1+2}{2} = 1{,}5, \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25, \ldots$ Nabízí se opět otázka, jak dlouho můžeme tuto činnost provádět. Pokud zůstaneme v našem konečném světě a necháme žáky nůžkami půlit papír, skončí poměrně brzy. Matematika nám ale takováto omezení neklade. Můžeme pokračovat donekonečna.

Nabízí se tedy druhá odpověď: Celá část osy v intervalu $\langle 1; 5\rangle$ je pokryta nekonečně mnoha body, které jsou všechny obrazem racionálních čísel. Skutečnost je ale úplně jiná. I kdybychom na číselné ose znázornili všechna racionální čísla, nezaplníme ji celou, zůstane tam ještě nekonečné množství neobsazených bodů. Těch je dokonce mnohem více nežli zaplněných.[1]

Příklad 2

Uvažujme řadu 1-1+1-1+1-1+.... Dokážeme určit její součet?

Jedním z pojmů, který je k porozumění reálným číslům nepostradatelný, je pojem nekonečna. S nekonečnem se můžeme seznamovat na nekonečných řadách. Přestože nekonečné řady ani zdaleka nepatří od učiva základní školy, tento příklad dokážou někteří žáci řešit. Obvykle začínají metodou pokusu a omylu (sčítají od začátku a pak zobecňují), ti šikovnější dokážou najít odpověď. Protože postupují pomocí částečných součtů, dojde jim, že celkový výsledek závisí na tom, jaký je poslední člen řady. Ten ale neexistuje.

Dokážeme najít hned několik součtů této řady podle postupu, který zvolíme k výpočtu.

Řešení 1:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$
$$-S = \quad -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

[1] Georg Cantor ukázal, že všechny spočetné nekonečné množiny jsou nejmenší nekonečna, která mohou existovat. Sem patří množina přirozených čísel i množina racionálních čísel. Zjistil však, že existují i nespočetná nekonečna, např. množina všech desetinných čísel (obsahující i iracionální čísla).

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Když nyní odečteme druhou řadu od první, všechny členy kromě prvního členu první řady se vyruší, takže dostaneme $2S = 1$. Konečný výsledek je tedy

$$S = \frac{1}{2}.$$

Řešení 2:

Nyní budeme párovat členy původní řady:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

Zdá se, že tento model párování lze zobecnit na nekonečně mnoho dvojic řady. Řadu proto můžeme přepsat jako

$$S = 0 + 0 + 0 + \cdots$$

a součet této řady je $S = 0$.

Řešení 3:

Řadu však můžeme spárovat i jiným způsobem:

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots,$$

tentokrát je výsledek $S = 1$.

Lze dokázat, že součet zadané řady neexistuje. Dnes bychom jednoduše zjistili, že není splněna nutná podmínka konvergence posloupnosti ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) a okamžitě bychom znali odpověď. Problém je právě v tom, že řada má nekonečně mnoho členů. Existuje sice první člen, ale neexistuje poslední. Historicky bylo velmi obtížné rozlišit, kterou řadu lze upravovat – tj. přerovnávat členy, seskupovat je do závorek, apod. (např. geometrickou) a kterou nelze. Zde jsme se setkali s nekonečnou řadou, kterou upravovat nelze.

Příklad 3

Kolem roku 450 př. n. l. formuloval Zenon svůj paradox o Achillovi a želvě. Achilles má závodit s želvou v běhu na 100 metrů. Protože je Achilles desetkrát rychlejší než želva, dostane želva desetimetrový náskok. Když Achilles uběhne 10 metrů, je v místě, odkud želva startovala, želva mezitím uběhla 1 metr. Když Achilles uběhne 1 metr, želva uběhne desetinu metru. Takto můžeme pokračovat do nekonečna. Zenon tedy tvrdí, že Achilles nikdy nedožene želvu.

S tímto příkladem se žáci setkávají obvykle až na střední škole a to v hodinách společenských věd, nikoli matematiky. Někteří talentovaní žáci jsou však schopni příklad vyřešit i na základní škole.

Pokud se problém nadnese pouze filozoficky, může vyvolat dojem, že jej opravdu nelze řešit. Matematické řešení je přitom velmi elegantní a rychle nám dává odpověď. Náskok želvy před Achillem je v jednotlivých stádiích závodu (v metrech):

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

$$10; 1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \ldots$$

Když členy této posloupnosti dokážeme sečíst, zjistíme, zda Achilles želvu dožene nebo ne. Součet řady označíme S a dostáváme

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots$$

Každý člen této řady (kromě prvního) je desetinou předcházejícího členu. Jedná se tedy o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{10}$. Když celou řadu vynásobíme deseti, dostáváme

$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots$$

Odečteme-li první rovnost od druhé, dostaneme

$$10S - S = 100,$$

neboli $9S = 100$, tj. $S = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$. To znamená, že Achilles dohoní želvu po 11 a $\frac{1}{9}$ metrech.

Příklad 4

Ukažte, že číslo 0,12345678910111213... (píšeme za sebou všechna přirozená čísla) je iracionální.

Žáci základní školy mohou příklad řešit úvahou. Víme, že dané číslo vzniklo z po sobě jdoucích přirozených čísel. Každé je jiné, proto není možné najít periodu. Nejedná se o důkaz, avšak příklad vytváří velmi dobrou představu iracionality.

Důkaz je možné provést sporem. Budeme předpokládat, že dané číslo je racionální, to znamená, že má nekonečný desetinný periodický rozvoj s délkou periody n. V daném čísle někde jistě najdeme posloupnost n devítek. Perioda je tedy složena ze samých devítek. Je ale zřejmé, že už dříve jsme se museli setkat s posloupností n osmiček. Tím se dostáváme ke sporu.

Ještě jedna zajímavá otázka se v souvislosti s tímto příkladem nabízí: Co kdybychom odstranili desetinnou čárku? Dostali bychom číslo 12345678910111213... Jedná se o nekonečně velké číslo?[2]

[2] První, kdo zavedl pojmy potenciální a aktuální nekonečno, byl Aristoteles. Přivedlo ho k tomu přemýšlení nad Zenonovými paradoxy. Byl přesvědčen o tom, že je možno donekonečna přičítat jednotku a tím získávat větší a větší čísla. Pořád ale budou vznikající čísla konečně velká. Nekonečně velké číslo podle něj neexistuje. To znamená, že nekonečno potenciálně existuje, avšak aktuálně ne. Řešení součtu nekonečných řad (které se vyskytují i v Zenonových paradoxech) je však umožněno uznáním aktuálního nekonečna, kdy nekonečnou řadu pokládáme za celek.

Příklad 5

Číslo π

Žáci se s číslem π setkávají poprvé při výpočtu obvodu kruhu z jeho průměru. V této souvislosti jim bývá uveden „vzorec“ $o = \pi d$ a někdy jsou hned od začátku vedeni k tomu, aby místo symbolu π psali 3,14. Tím jsou žáci ochuzeni o dva důležité poznatky:

1) Tím, že se naučí vzorec, do kterého mechanicky dosazují, si neuvědomí **vztah** mezi obvodem kruhu a jeho průměrem. Pro jakýkoli kruh je poměr $\frac{o}{d}$ vždy stejný. Žáci vzorec využívají jako černou skříňku na výpočet, do které se jedno číslo vloží a jiné číslo vypadne.
2) Žáci nezjistí, že se jedná o iracionální číslo.

V prvním případě existují různé experimentální činnosti, pomocí kterých mohou žáci přibližně určit vztah mezi obvodem a průměrem kruhu. Můžeme např. postupovat tak, že pro několik kruhů různých poloměrů změříme provázkem jejich obvod a poté počítáme poměr obvodu a průměru. Údaje si žáci zapíší do tabulky:

d	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
o	16,2	16,3	18,3	18,2	22,2	22,2	25,3	25,2	28,6	28,5
o/d	3,24	3,26	3,05	3,03	3,17	3,17	3,16	3,15	3,17	3,16

Nyní můžeme s žáky diskutovat o tom, jaké dostali výsledky a co by o nich dokázali říct. Pokud měřili dostatečně přesně (čím menší je kruh, tím hůře se měří, je vhodné začínat např. na 7 cm), měli by si všimnout, že výsledky se velmi podobají. Nyní jim může učitel prozradit, jaký existuje mezi obvodem a průměrem vztah. Žáci si mohou vypočítat aritmetický průměr, v našem případě

$$\frac{o}{d} \doteq 3{,}156$$

a ten porovnat se skutečnou hodnotou.[3]

Mnohem složitější je přesvědčit žáky o tom, že jde o iracionální číslo. Prostředky žáka základní školy nedokážeme provést důkaz. Důkazy iracionality čísla π přesahují obtížností středoškolskou matematiku.

První, kdo určoval hodnotu čísla π, byl Archimédes v 3. století př. n. l. Kružnici nahrazoval vepsanými a opsanými mnohoúhelníky (šestiúhelníkem, dvanáctiúhelníkem, atd.,

[3] Pokud dítě má objevovat nový poznatek svými vlastními způsoby a pomocí matematického aparátu, který má aktuálně k dispozici, je užitečné, abychom mu dopředu neprozradili výsledek. Např. kdyby žák dopředu věděl, že $o \doteq 3{,}14d$, výsledek by pro něj nebyl zdaleka tak zajímavý, jako když se na něj snažili přijít sám.

až došel k 96-úhelníku) a zjišťoval poměr mezi jejich obvodem a poloměrem kružnice. Došel k aproximaci $\frac{22}{7}$ a tím určení hledaného poměru s přesností dvě desetinná místa.

V roce 1671 vyšel Skot James Gregory z jednoduchého a zřejmého faktu, že $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Rozložil funkci $\operatorname{arctg} x$ v okolí bodu 1 do nekonečné řady a sestavil rovnici

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

K dokreslení problematiky je vhodné zmínit žákům historický vývoj a zpřesňování hodnoty čísla π. Rovněž je užitečné žákům sdělit, že dnes hledají další a další desetinná místa čísla π výkonné počítače. Na internetu je možno najít číslo π na milion desetinných míst, čímž jsou někteří žáci doslova fascinováni.

Příklad 6

Odmocnina ze 2.

Žákům základní školy můžeme zadat úkol, zda dokážou pokusem a omylem najít přesnou hodnotu $\sqrt{2}$. Žáci mohou postupovat např. takto:

$$1{,}1^2 = 1{,}21; 1{,}2^2 = 1{,}44;\ 1{,}3^2 = 1{,}69;\ 1{,}4^2 = 1{,}96; 1{,}5^2 = 2{,}25$$

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

$$1{,}41^2 = 1{,}9881;\ 1{,}42^2 = 2{,}0164$$

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

atd. Pokud dítě bude dostatečně trpělivé, může se dostat k hodnotě 1,414213562 nebo i přesnější. Např. $1{,}4142135629^2$ je podle kalkulačky 1,999999999, $1{,}4142135630^2$ je 2,000000002.

Ani kdyby dítě bylo sebetrpělivější a vzalo si na pomoc počítač, nemohlo by si být jisto, že se mu jednou nepodaří najít periodu. To už bude muset věřit učiteli.

Důkaz toho, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo, je snadný a proveditelný i na střední škole. Jedná se o známý důkaz sporem, kdy předpokládáme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. V tom případě je lze zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$. Můžeme navíc předpokládat, že p a q jsou nesoudělná (kdyby nebyla, můžeme je vydělit jejich největším společným dělitelem a dostali bychom jiná nesoudělná čísla). Upravíme rovnici:

$$\sqrt{2}q = p$$

$$2q^2 = p^2$$

Z této rovnice je zřejmé, že 2 dělí p^2, což platí právě tehdy, když 2 dělí p (protože 2 je prvočíslo). Proto $p = 2r$, kde r je přirozené číslo, tedy

$$2q^2 = 4r^2$$

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

$$q^2 = 2r^2$$

a to znamená, že 2 dělí q^2, tedy 2 dělí q. To ale odporuje našemu původnímu předpokladu, že p a q jsou nesoudělná čísla.

Příklad 7

Historické aproximace některých iracionálních čísel.

Ve Sbírce náročnějších úloh z matematiky pro 6. – 9. ročník (1967) můžeme najít zajímavé příklady z historie, které je možno využít na základní škole (např. jako zpestření pro nadané žáky):

1. Udejte v desetinných číslech krajní hodnoty čísla π, které určil italský matematik Leonardo Pisánský (13. stol.) vztahem
$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}.$$
2. Čínští matematikové ve 2. stol. n. l. určili hodnotu čísla π ze vztahu: Druhá mocnina délky kružnice se má k druhé mocnině obvodu čtverce té kružnici opsaného jako 5:8. Vypočítejte hodnotu čísla π.
3. Přibližné vyjádření hodnoty odmocniny ze dvou:
   a) Heron Alexandrijský: $\frac{7}{5}$;
   b) Indičtí matematikové: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot4} - \frac{1}{3\cdot4\cdot34}$;
   c) Herbert v 10. st.: $\frac{17}{12}$.

   Čím se liší přibližné hodnoty a, b, c od výsledku udávaného v tabulkách?
4. Přibližné vyjádření druhé odmocniny ze tří:
   a) Heron: $\frac{26}{15}$; $\frac{97}{56}$;
   b) Archimédes: $\frac{362}{209}$; $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$.

   Zjistěte přesnost přibližných vyjádření porovnáním s hodnotami v tabulkách.

[1. $3{,}141056 < \pi < 3{,}142732$; 2. $\sqrt{10}$; 3. a) 1,4; b) 1,4142157; c) $1{,}41\overline{6}$; 4. a) $1{,}7\overline{3}$; 1,732147857; b) $1{,}73205 > \sqrt{3} > 1{,}73202$]

Jak počítá kalkulačka

Na moderních vědeckých kalkulačkách máme symboly pro iracionální čísla a není proto potřeba zaokrouhlovat. Pokud bychom si mysleli, že se kalkulačka obtěžuje pamatovat si dané

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

číslo na podstatně více míst, než se objeví na displeji, byli bychom příliš velcí idealisté. O iracionálním čísle nemůže být samozřejmě ani řeč. To zmiňuji proto, že někteří žáci podléhají představě, že kalkulačka pracuje opravdu např. s číslem π. Zadáme-li na vědecké kalkulačce π, vyčíslí se 3,141592654. Zadáme-li „Ans−3,141592654“, je výsledek $-4{,}1 \cdot 10^{-10}$.

Starší kalkulačky dokonce poměrně nedostatečně zaokrouhlovaly i nedesetinné zlomky. Mohli jsme se setkat např. s výpočtem

$$\frac{1}{3} \cdot 6 = 0{,}3333333 \cdot 6 = 1{,}9999998.$$

Dnes bychom tuto „přeměnu“ čísla 2 mohli provést na kalkulačkách některých mobilních telefonů.

Závěr

Z uvedených příkladů je patrné, že seznamovat žáky s problematikou reálných čísel je složitý úkol. Důkazy iracionality čísel spadají svojí náročností do vysokoškolské matematiky. Avšak pokud se studenti setkávají s iracionálními čísly až na vysoké škole, nemají vůbec vybudovanou intuitivní představu pojmu iracionality a důkazy špatně vstřebávají.

Pro žáky je velmi důležité, aby dostali možnost o problematice diskutovat. To je velký problém v reálné výuce, zejména z časového hlediska. Přesto alespoň ti žáci, kteří mají o matematiku zájem a u kterých je pravděpodobné, že se s ní budou setkávat i ve vysokoškolském studiu, by se čas od času měli seznámit s otázkou reálných čísel.

Literatura:

BARROW, J. D.: *Kniha o nekonečnu.* Praha: Paseka, 2007

BERÁNEK, J.: Možnosti pochopení pojmu nekonečno u budoucích učitelů prvního stupně základní školy. In Mergl, M. a kol.: *Arnica.* Plzeň: ZČU, 2011

DEVLIN, K.: *Jazyk matematiky.* Praha: Dokořán a Argo, 2011

KUŘINA, F. A KOL.: *Matematika a porozumění světu*. Praha: Academia, 2009

KUŘINA, F., PŮLPÁN, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia, 2006

MALÁČ, J.: *Sbírka náročnějších úloh z matematiky.* Praha: SPN, 1967

Matematický korespondenční seminář. http://mks.mff.cuni.cz/archive/16/1.pdf

SEIFE, CH.: *Nula.* Praha: Dokořán a Argo, 2005

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.