

Osvojování vědomostí o lineárních funkcích

Irena Budínová

Pedagogická fakulta MU

irena.budinova@seznam.cz

Učivo funkcí je pro mnoho žáků problematické. Mnohé české i zahraniční výzkumy ukazují, že žáci mají v oblasti funkcí mnoho špatných představ. Např. výzkum A. Kopáčkové (Kopáčková, 2002, s. 157, Kopáčková, 2003) poukazuje na fakt, že žáci mají poněkud zkreslené povědomí o tom, co je a není funkce. Např. při rozhodování žáků o tom, který graf je či není grafem funkce, hrála roli známost modelu, spojitost, symetrie, hladkost grafu apod. Diskrétnost nebo konstantnost grafu vzbuzovala v žácích pocit „nefunkce“. Obdobně americký výzkum (Carson, Oehrtman, 2005) odhalil, že žáci konstantní funkci nepovažují za funkci, neboť očekávají, že předpis funkce má obsahovat symbol „ x “, že mají problémy s rozlišením závisle a nezávisle proměnné, že jejich představy o funkcích jsou omezeny na specifické funkce (zejména lineární a kvadratickou).

V úvodu výuky lineární funkce je možno zařazovat úlohy, které žáci dokážou intuitivně řešit i bez znalosti nových poznatků z oblasti funkcí. Pomocí těchto úloh postupně zařazujeme nové pojmy. Žáci si snáze vytvoří představu o pojmech, z nichž většina je velice abstraktní.

Ukážeme možnost výuky lineární funkce ve třech fázích¹. Výuka má několik nevýhod a jednu velkou výhodu:

Nevýhoda 1: Někteří žáci nemají chuť samostatně objevovat nové poznatky, příjemnější je jim opisovat z tabule.

Nevýhoda 2: Ze začátku zdánlivě časové zdržení. Později se ale díky efektivnímu osvojení základních pojmů časová ztráta vyrovná.

Výhoda: Dobré pochopení abstraktních pojmů a úspěšný vstup do učiva funkcí.

Fáze 1: Osvojení základních pojmů

Základní pojmy (jako jsou nezávisle a závisle proměnná, definiční obor, graf funkce apod.) byly zavedeny pomocí úloh, v nichž měli žáci možnost použít strategií řešení bez využití funkčního myšlení.

1. **Učivo:** Závislosti dvou proměnných – vztah závisle a nezávisle proměnné. Jak poznat, která je která? Je podstatné je odlišovat? Graf funkce.

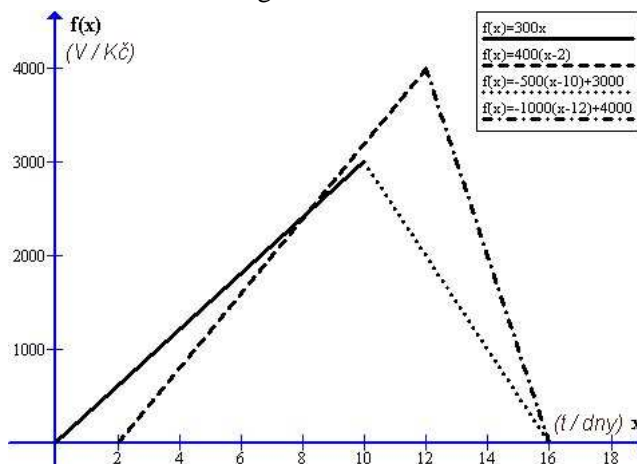
Metoda: Odvozování základních pojmů na časových závislostech.

- **Úloha 1:** Alice chodí na brigádu. Každý odpracovaný den vydělá průměrně 300 Kč. Zapiš tabulku závislosti vydělaných peněz na počtu odpracovaných dnů a zakresli graf.
- **Úloha 2:** Bára začala chodit na brigádu o 2 dny později, ale denně vydělá průměrně 400 Kč. Zapiš tabulku, zakresli graf a zjisti, který den má Bára stejně peněz jako Alice.

¹ Tímto způsobem jsem prováděla výuku lineárních funkcí na gymnáziu. Kladla jsem důraz na samostatnou práci žáků.

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – EDUCOLAND"

- **Úloha 3:** Alice chodila na brigádu 10 dnů a pak začala peníze utrácet. Za jak dlouho by všechny utratila, kdyby denně utratila průměrně 500 Kč? Zakresli graf.
- **Úloha 4:** Bára pracovala také 10 dnů. Kolik by mohla denně utratit, aby všechny peníze utratila zároveň s Alicí? Zakresli graf.



Obr. 1: Grafy pro úlohy 1 – 4²

2. **Učivo:** Funkční předpis pomocí rovnice – pochopení významu zápisu $y = ax + b$.

Metoda: Zobecnění výsledků předchozích příkladů.

- **Úloha 5:** Nalezni funkční předpis pro závislost vydělaných peněz na počtu odpracovaných dnů ve všech předešlých případech.

3. **Učivo:** Definiční obor a obor hodnot. Co je a není funkce.

Metoda: Zavedení důležitých pojmů na konkrétních příkladech, kterým žáci porozuměli.

- **Úloha 6:** Zapiš definiční obory (tj. všechny hodnoty, kterých může nabývat nezávisle proměnná) a obory hodnot (tj. všechny hodnoty, kterých nabývá závisle proměnná) v předešlých případech.
- **Úloha 7:** Zakresli graf se svislou úsečkou a interpretuj jej³.

Při řešení těchto úloh byl na žáky kladen požadavek samostatné práce ve skupinách. Žáci měli možnost se mezi sebou domlouvat, navrhnout a odůvodňovat řešení. Při této činnosti jsem je pouze pozorovala, nezasahovala do ní, nekomentovala nesprávná řešení, protože obvykle se našel spolužák, který upozornil, že myšlenka není správná. Důsledkem tak bylo, že vyřešení uvedených úloh bylo značně časově náročné.

Ze začátku museli být žáci upozorněni na to, jak mají popisovat osy. Buď je totiž nepopisovali vůbec, nebo písmeny x a y . Takové označení však neumožní zpětné vyčtení informací z grafu. Žáci měli osy popisovat pomocí „veličiny“ i „jednotky“ (např. výdělek v korunách). Zjistilo se, že žáci vůbec netuší, jak mají poznat nezávisle a závisle proměnnou. Vysvětlit jim, které proměnné přísluší

² Pro větší přehlednost je zde uveden spojnicový graf. Při práci v hodině sestrojili žáci graf pomocí izolovaných bodů (tak jak odpovídá danému diskrétnímu jevu) a při zobecnění konkrétních úloh na funkční předpis již pracovali se spojnicovým grafem.

³ Žáci si zakreslili graf, kde nezávislá proměnná byl čas a závislá např. vydělané peníze. Dokázali vyčíst, že podle grafu se svislou úsečkou sice čas neplyne, ale mění se množství vydělaných peněz, což není možné.

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – EDUCOLAND"

kteřá osa, trvalo několik vyučovacích hodin. Teprve po několika týdnech dokázali v podstatě všichni žáci správně popsat osy a pochopili rozdíl mezi nezávisle a závisle proměnnou.

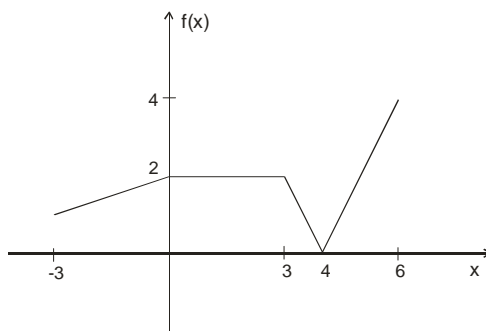
Při řešení žáci používali výpočtových metod nebo tabulky. Např. úlohu 3 žáci řešili obvykle tak, že nejdříve pomocí tabulky zjistili, kolik peněz měla Alice po 10 dnech (je to 3000 Kč) a potom už jednoduše vydělili 3000:500, aby určili, kolik dnů by je utrácela.

U úlohy 5 nebyl pro většinu žáků problém pochopit, že jestliže si denně vydělám 300 Kč, za 2 dny je to 300.2 Kč, za x dnů 300. x Kč. Tímto způsobem byli žáci seznámeni s pojmem funkční předpis. S větší či menší pomocí byli žáci schopni pochopit také to, že pro Báru platí 400.($x-2$), protože například 5. uvažovaný den pracuje Bára teprve 3 dny. Pro zbytek případů už byla většina žáků schopna pracovat samostatně.

Hlavní problém byl pro žáky v zakreslení grafu tak, aby se jim celý vešel do sešitu. Jako by nedokázali dopředu přemýšlet o tom, jaký je definiční obor a obor hodnot funkce, začali kreslit a teprve potom zjistili, že si graf špatně rozmístili a museli začít znovu.

Fáze 2: Procvičování pojmů

Přestože se po určité době zdálo, že žáci již pojmy pochopili a rozumí jim, při procvičování se vynořila celá řada dalších problémů. Jednalo se zejména o zápisy jako $y=f(x)$, $D(f)$ a $H(f)$. Např. velmi problematická byla úloha, kdy žáci měli z grafu na obr. 2 vyčíst následující informace: a) určit $D(f)$ a $H(f)$, b) určit hodnotu funkce v bodech -2; -1 (stačilo přibližně odhadnout, žáci se obvykle bavili vymyšlením čísel jako $f(-2)=1,333$); 0,5; 1; 2, c) zjistit všechna $x \in D(f)$, pro která je $f(x)=-2$; 0; 1; 2; 3.



Obr. 2

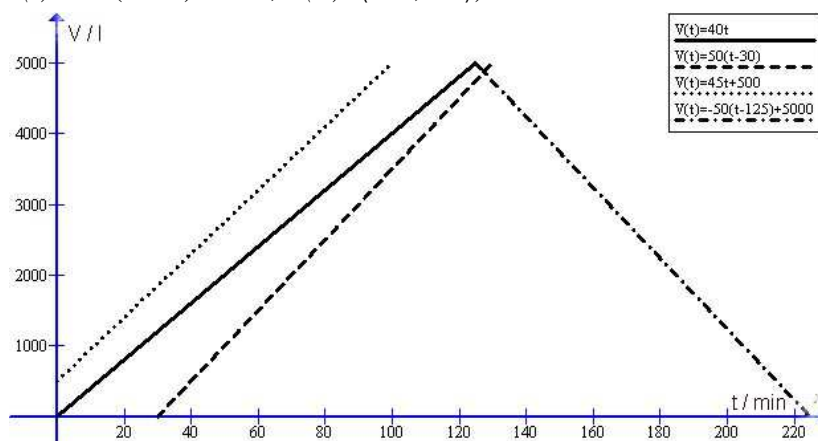
Aby poznatky žáků nebyly budovány formálně, bylo potřeba procvičovat pojmy na mnoha příkladech. Jednalo se o příklady z učebnice.

Fáze 3: Používání dynamických postupů⁴ při zakreslování grafů elementárních funkcí

Při odvozování zákonitostí pro lineární funkci jsme se vrátili k řešení aplikačních úloh. Úkolem bylo zakreslit graf, určit funkční předpis a definiční obor funkce.

Do jednoho grafu zakresli následující závislosti:

- Do bazénu přitéká voda rychlostí 40 l/min, na začátku je bazén prázdný. Objem bazénu je 5000 l. ($V(t)=40t$, $D(V)=\langle 0;125 \rangle$)
- Do bazénu přitéká voda rychlostí 50 l/min, přitéká o 30 min později než do bazénu a). ($V(t)=50(t-30)$, $D(V)=\langle 30;130 \rangle$)
- Do bazénu přitéká voda rychlostí 45 l/min, na počátku plnění bylo v bazénu 500 l vody. ($V(t)=45t+500$, $D(V)=\langle 0;100 \rangle$)
- Z bazénu a) začíná po naplnění voda vytékat rychlostí 50 l/min. ($V(t)=-50t+5000$, $D(V)=\langle 0;100 \rangle$), pokud by graf zakreslovali do stejného obrázku jako v části a), pak $V(t)=-50(t-125)+5000$, $D(V)=\langle 125;225 \rangle$)



Obr. 3: Grafy pro závislosti a) – d)

Žáci na základě těchto úloh pochopili význam koeficientů v zápise $y=ax+b$ a souvislost s grafem. Dlužno poznamenat, že správná řešení byla většina žáků schopna určovat samostatně.

V učivu lineárních funkcí jsem od studentů od počátku požadovala, aby graf nezakreslovali pomocí bodů, ale rovnou ze zápisu $y=ax+b$, ze kterého určí směrnici a posunutí. Tento postup je výhodný pro další funkce a lze jej použít jako šablonu, neboť všechny další funkce se chovají obdobně. Mnohem snáze si proto zapamatovali i zakreslování grafů dalších elementárních funkcí.

Na příkladu funkce $y=2x+1$ ukážeme, jakým způsobem studenti postupovali:

- Nakreslili graf funkce $y=x$.

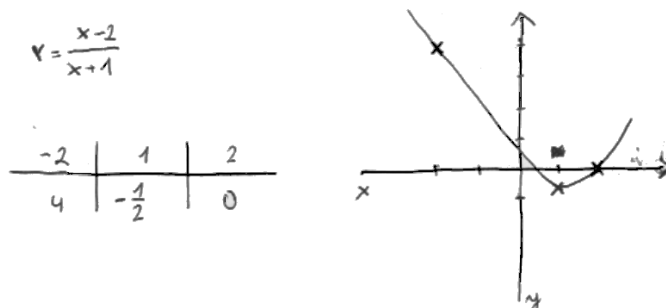
⁴ Dynamickými postupy myslíme postupy, při nichž je používáno funkčního myšlení, zatímco statické postupy nahrazují funkční myšlení jinými výpočtovými metodami (Budínová, 2010, s. 26). Např. při zakreslování grafu lineární funkce může žák postupovat tak, že získá souřadnice bodů dosazením několika diskretních hodnot za proměnnou x (statický postup), nebo že chápe význam symbolů ve formuli $y=ax+b$ a graf zakreslí bez dosazování konkrétních hodnot (dynamický postup).

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – EDUCOLAND"

- b) Nakreslili graf funkce $y=2x$, který má oproti předchozí funkci dvojnásobnou směrnici. Na tento fakt přišli bez větších potíží sami žáci, neboť pro ně nebyl problém představit si, že tato funkce roste dvakrát rychleji.
- c) Nakreslili graf funkce $y=2x+1$, který je oproti předchozímu posunut o 1 na ose y . Tento fakt vyplynul z aplikačních úloh, kdy žáci sami učinili závěr, co ve funkčním předpisu znamená koeficient „ b “. Také byli upozorněni, že zápis si můžou přepsat jako $y=2(x+\frac{1}{2})$, z čehož poznají posunutí po ose x . I tento fakt vyplynul z aplikačních úloh.

Dále měli žáci u každého zadání určit vlastnosti funkce.

Tento postup má využití i u některých dalších elementárních funkcí, se kterými se žáci seznamují na gymnáziu. Pokud se od začátku dbá na to, aby žáci používali dynamické postupy a nezakreslovali grafy pomocí několika bodů, které se spojí, může se předejít např. tomu, že žáci u lineárně lomené funkce dosadí dvě nebo tři hodnoty za x a získané body spojí jedinou křivkou, jak se s tím často setkávám a jak to ukazuje obr. 4.



Obr. 4

Závěr

Výuková metoda je náročná pro učitele i pro žáky. Avšak díky neformálnímu přístupu má učitel možnost poznat, jak náročné je pro žáky osvojení některých pojmů. Žáci mají možnost seznamovat se s pojmy takovým způsobem, který je pro ně pochopitelný a využitelný v pozdější výuce funkcí.

Žáci v závěru výuky ve velké většině využívali pro řešení úloh dynamických postupů, neměli větší problémy s určením definičního oboru nebo oboru hodnot funkce, se čtením údajů z grafu, ať už šlo o určování hodnot nezávisle nebo závisle proměnné (ve všech případech vždy jen několik žáků třídy řešení neumělo najít nebo v něm učinili nějakou chybu). Také při zakreslování grafů funkcí a určování jejich vlastností byli velmi úspěšní. I nadále však byly pro žáky obtížné problémově formulované úlohy, přestože se s nimi setkávali po celou dobu výukové metody. Žáci stále upřednostňovali úlohy, u nichž je možno přesně kopírovat určitý algoritmus.

Literatura

BLANTON, M. L., KAPUT, J. J.: Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Massachusetts Dartmouth, 2004

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – EDUCOLAND"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

BUDÍNOVÁ, I.: *Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladu učiva o funkcích na ZŠ*. Disertační práce. Brno 2010

BUDÍNOVÁ, I.: *Osvojování vědomostí o lineárních funkcích žáky gymnázia*. In: Učitel matematiky. Ročník 20, číslo 1, říjen 2011

CARLSON, M., OEHRMAN, M.: *Key Aspect of Knowing and Learning the Concept of Function*. In MAA online, http://www.maa.org/t_and_l/sampler/research_sampler.html, 2005

EISENMANN, P.: Test funkčního myšlení žáků a studentů. *Matematika – fyzika – informatika* 15, 2005/2006.

EISENMANN, P.: Možnosti rozvoje funkčního myšlení žáků ve výuce matematiky na základní škole. In *Sborník příspěvků celostátní konference Jak učit matematice žáky ve věku 11 – 15 let*, JČMF, Hradec Králové, 2006, 53 – 62

EISENMANN, P., KOPÁČKOVÁ, A.: *Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na základní škole*. Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP. Praha: JČMF, 2006.

KOPÁČKOVÁ, A.: Nejen žákovské představy o funkcích. In *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, ročník 47, č. 2., Praha 2002.

KOPÁČKOVÁ, A.: How Not Only Czech Students Think about Functions. *The Autumn Conference in Mathematics Education*, Praha 2003, 47 – 52

ODVÁRKO, O.: *Matematika pro gymnázia: Funkce*. Praha: Prometheus 1993.