CO JE OBECNÁ TEORIE RELATIVITY

Prof.RNDr.Jan Horský,DrSc

ÚVOD

Gravitace je snad tou nejtajemnější fyzikální interakcí.Rozhodně nehraje roli Popelky, rozhodně není popsána jedinou skalární funkcí jak tomu je v Newtonově teorii gravitace.Díky Einsteinově teorii gravitace (obecné teorii relativity) víme,že gravitace přímo vyžaduje ke svému popisu hned deset funkcí, z Popelky se tak stala královna.V této části třídílného námětu podáme přístupný výklad této teorie. Druhý příspěvek ponese název Observační testy obecné teorie relativity ,příspěvek třetí a poslední se bude jmenovat Aplikace obecné teorie relativity.Tím umožníme talentovaným středoškolským zájemcům získat o soudobé gravitační fyzice serioznější informace než jsou uváděny v řadě populárních knihách či článcích.
Je samozřejmě věcí názoru co všechno by dnešní schopný a talentovaný student na střední škole o obecné teorii relativity měl vědět.Nezvratným faktem ovšem zůstává,že je to právě moderní fyzika,která je pro studenty (a nejen pro ně) velmi přitažlivá a silně motivující.

PRINCIP LOKÁLNÍ EKVIVALENCE

Bude-li se například v homogenním gravitačním poli nacházet matematické kyvadlo nesoucí setrvačnou hmotu m a budou-li nás zajímat jeho malé kmity,pak z Newtonových pohybových rovnic pro dobu kyvu T tohoto kyvadla obdržíme vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{m}\frac{l}{g}},$$

kde l značí délku kyvadla, g je intensita gravitačního pole v odpovídajícím bodě a kde M značí těžkou – gravitační – hmotu kyvadla.
Dobu kyvu našeho kyvadla lze ovšem měřit a druhy hmoty (látky) zavěšené na konci kyvadla mohou být měněny.Jednou půjde například o dřevo,jindy třeba o měď.
Kdyby poměr hmoty těžké a setrvačné závisel na druhu hmoty (byl například různý pro dřevo či měď) byla by různá doba kyvu našeho kyvadla pro obě látky.Existuje tedy krásná možnost měření a té si byl Newton vědom.I když přesnost jeho měření nebyla vysoká (uvádí se,že poměr obou hmot byl u něho roven jedné s přesností kolem 10^{-3}), přesnost následujících měření se zvyšovala a postupně do učebnic přešlo něco jako samozřejmé,že poměr obou hmot je roven jedné, že hmota těžká (gravitační) je rovna hmotě setrvačné.Experimenty z roku 1996 uvádí,že poměr obou hmot je roven jedné již s přesností 10^{-13}. !
Einstein se snažil,zhruba od roku 1907, do speciální teorie relativity zavést i gravitaci,ani on však tento problém řešit nedokázal.Teprve jeho úvahy,dnes obvykle spojované termínem Einsteinův výtah,mu poskytly pevnou půdu pro vytvoření nové teorie gravitace,obecné teorie relativity(1915).Představme si výtah,který se v inerciální soustavě S pohybuje například s konstantním zrychlením g podél kladné osy z. A nyní si představme tentýž výtah ale nacházející se v homogenním gravitačním poli o intensitě g směřující do osy –z. Napíšeme-li pohybové Newtonovy rovnice popisující mechanické procesy a to v obou soustavách, zjistíme,že jsou stejné, bude-li platit,že hmota těžká je rovna hmotě setrvačné.Vypadá to tedy tak,jako bychom mohli vliv gravitačního pole odstranit přechodem k volně padající inerciální soustavě.

Gravitační pole reálných těles však homogenní není.V takovém případě lze předchozí závěry považovat za platné jen v malých prostorových oblastech a v krátkých časových intervalech takových,že v nich lze gravitační pole za homogenní považovat.Lze tedy vyslovit tvrzení mající plně vlastnosti fyzikálního principu: V malém okolí každého prostoročasového bodu lze zavést lokálně inerciální systém,ve kterém platí fyzikální zákony jako v .inerciálních systémech speciální teorie relativity. A hovoří se o Einsteinově principu lokální ekvivalence.
Z uvedeného je patrno,že rovnost hmoty těžké a setrvačné je již důsledkem vyřčeného principu.
Kdybychom důsledek Einsteinova principu lokální ekvivalence převedli do matematického jazyka zjistili bychom následující fakt: Čtverec ds^2 intervalu mezi dvěma blízkými prostoročasovými událostmi majícími souřadnice x^i a x^i+dx^i (indexy latinské abecedy nabývají hodnot 0,1,2,3) je dán mnohem složitějším výrazem než na jaký jsme zvyklí ze speciální teorie relativity kdy můžeme psát

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 .$$

Obdrželi bychom,že platí

$$ds^2 = \sum_{i=0}^{i=3}\sum_{k=0}^{k=3} g_{ik}\left(x^m\right)dx^i dx^k .$$

Ve shodě s Einsteinem budeme považovat tak zvané metrické koeficienty (funkce) g_{ik} za veličiny v indexech i,k symetrické,nezávislých metrických koeficientů bude tedy deset.
V dalším textu přijmeme i druhou část Einsteinovy sumační symboliky,budou-li se indexy v libovolném výrazu vyskytovat dvakrát a budou-li se nacházet v pozicích „nahoře-dole“ znamená to,že se v tomto výrazu sčítá přes všechny jejich možné hodnoty,tj.od 0 do 3.Sumační znaky se poté již nemusí psát,například tedy bude

$$ds^2 = g_{ik}\left(x^m\right)dx^i dx^k .$$

V Einsteinově teorii gravitace je tudíž ,závěrem řečeno, gravitační pole popsáno deseti funkcemi $g_{ik}(x^m)$ závisejícími na prostoročasových souřadnicích.O matematické obecnosti a jiných vlastnostech metrických koeficientů hovořit nebudeme.

OBECNÝ PRINCIP RELATIVITY

Speciální princip relativity tvrdí,jak víme,že zákony přírody musí mít stejný tvar po provedení Lorentzovy transformace.Ve shodě s Einsteinem se však můžeme ptát,cože je přírodě do souřadnicových systémů,které jsme zavedli my a do jejich pohybových stavů ?
Einsteinova odpověď na tuto sugestivní otázku je velmi prostá:Zákony přírody musí být vyjádřené ve formě (ve tvaru),který se nezmění po provedení transformace prostoročasových souřadnic vyjadřujících přechod k nejrůznějším souřadnicovým soustavám.Takovou transformaci lze zapsat v obecném tvaru

$$x'^{\,i} = x'^{\,i}\left(x^m\right)$$

a budeme předpokládat,že existuje i transformace inversní.

Nechť S značí nějakou obecnou souřadnicovou soustavu (nemusí to tedy být soustava inerciální) a nechť A, B, C,   značí soubor měřitelných (fyzikálních) veličin.Zákon přírody lze v S napsat jednou či více rovnicemi typu

$$F\left(A, B, \ldots \frac{\partial A}{\partial x^i}, \frac{\partial B}{\partial x^k}, \ldots \right) = 0,$$

kde F je nějaká funkce fyzikálních veličin A, B,… a jejich parciálních derivací.V jiné obecné soustavě,třeba v S´ se souřadnicemi x'^i najdeme v procesu měření jiné hodnoty fyzikálních veličin ,označíme je jako A´, B´,… .Obecný princip relativity požaduje,aby platilo

$$F' = F.$$

Poznačme,že mezi fyzikální veličiny A,B,… patří i metrické koeficienty $g_{ik}(x^l)$.
Sluší se v závěru konstatovat,že matematikové vypracovali mocný a obdivuhodný aparát který dovoluje automaticky zajistit splnění obecného principu relativity.Jedná se o tensorový počet Tím se však nyní zabývat nebudeme.

EINSTEINOVY GRAVITAČNI´ ROVNICE

V každé fyzikální teorii existují rovnice mající charakter zcela fundamentálních rovnic.Pokud by nás zajímal pohyb částice v gravitačním poli je třeba k fundamentálním rovnicím pole nezávisle dodat stejně fundamentální pohybové rovnice těchto částic v tomto poli.V Newtonově gravitační teorii by tak šlo o tzv.Poissonovu diferenciální rovnici tvaru

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho,$$

kde Δ značí tzv.Laplaceův operátor, ρ je hustota hmoty budící gravitační pole φ a G je Newtonova gravitační konstanta.K této rovnici se pak dodá pohybová rovnice částice,kterou vypisovat jistě není třeba.Zadáme-li rozložení hustoty hmoty pak řešením rovnice pole (po přidání hraničních podmínek) získáme gravitační potenciál ϕ .Aplikací operace gradientu na funkci ϕ obdržíme sílu,kterou gravitační pole na uvažovanou zkušební částici působí,tuto sílu dosadíme do pravé strany Newtonových pohybových rovnic.Řešení těchto rovnic již vede k nalezení trajektorie této částice.
Protože gravitační pole není popsáno jedinou funkci ale hned deseti metrickými funkcemi $g_{ik}(x^m)$ a protože Newtonovy pohybové rovnice mění svůj tvar po provedení výše uvedené obecné transformace souřadnic, situace se Einsteinovi silně zkomplikovala.Pracoval na řešení právě tohoto problému přibližně od roku 1907 do roku 1915 !
Abychom mohli tyto rovnice pro funkce $g_{ik}(x^m)$ napsat,musíme si nejdříve říci,čím vším se musí rozložení hmoty relativisticky korektně charakterizovat.Především je to samozřejmě hustota hmoty ρ ,bude to tlak ve hmotě, napětí ve hmotě, rychlost hmoty, hustota toku hybnosti a hustota toku energie hmoty.Pochopit to není vůbec složité,stačí si uvědomit,že každé energii odpovídá hmota a každá hmota budí gravitační pole.Relativistický hmotný zdroj je tak popsán deseti nezávislými veličinami (funkcemi) které se značí jako $T_{ik}(x^m)$,přičemž je takovýto výraz v indexech i,k symetrický.. Relativista by tyto veličiny nazval symetrickým tensorem energie a hybnosti. Podrobnosti opět necháme stranou.
Je přirozené požadovat aby na pravé straně hledaných fundamentálních rovnic stál člen úměrný veličinám $T_{ik}(x^m)$.Na levé straně bude stát výraz dosud sice neznámý,avšak obsahující

nejvýše druhé parciální derivace metrických koeficientů $g_{ik}(x^m)$.Ale pozor,musíme si uvědomit,že žádné fundamentální rovnice fyzikální teorie nelze odvodit,lze je „jen“ postulovat a poté ověřovat jejich platnost.
Efektivně nám může pomoci variační princip extrémálnosti akce i jiné rozvahy postupně omezující velmi obecný tvar levé strany hledaných rovnic.Po strastiplné cestě zjistíme,že hledané základní rovnice mají tvar

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \Lambda g_{ik} = \kappa T_{ik},$$

kde Λ značí tak zvanou kosmologickou konstantu.
Deset funkcí R_{ik} a jedna funkce R (nesoucí název Ricciho tensor křivosti a Ricciho křivost) závisí již konkrétním způsobem na metrických koeficientech,na jejich prvních a druhých parciálních derivacích. Konkrétní tvar funkční závislosti vypisovat nebudeme.Konstanta

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

je tak zvaná Einsteinova gravitační konstanta.Uvedená velikost Einsteinovy gravitační konstanty plyne z požadavku,aby pro slabá gravitační pole přešla Einsteinova teorie gravitace v Newtonovu teorii gravitace.To je konkrétním vyjádřením principu korespondence.Předchozí rovnice se nazývají (úplnými) Einsteinovými rovnicemi, nebo též jeho gravitačním zákonem a splňují obecný princip relativity. Především uveďme,že jde o soustavu deseti parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu a to rovnic nelineárních.
Nebude tedy platit princip superposice,najdeme-li,například,dvě jejich řešení nebude jejich součet opět řešením.Na první pohled je patrné,že bude nutné mít k disposici efektivní metody k jejich řešení.Ať jde o řešení exaktní či o řešení aproximativní.
Řešit Einsteinovy gravitační rovnice znamená zadat rozložení hmoty (jakožto zdroje gravitačního pole),napsat levé strany a získaný systém rovnic řešit.Je téměř evidentní,že k těmto rovnicím musí být přidána jedna nebo více stavových rovnic které konkretizují typ hmoty.
V závěru poznačme,že veličiny R_{ik} konkrétně souvisí s komponentami tzv.Riemannova tensoru křivosti a ten již přesně popisuje zakřivení prostoročasu.Jsou-li, například,všechny komponenty Riemannova tensoru rovny nule v každém bodě prostoročasu,pak je prostoročas plochý (nezakřivený),je to prostoročas speciální teorie relativity

POHYB ČÁSTIC V GRAVITAČNÍM POLI

Jak jsme poznačili výše,k rovnicím pole musíme dodat pohybové rovnice částic (těles),které se v tomto poli pohybují.
Psát o obecně relativistických pohybových rovnicích je složité i v seriozních učebnicích,je to dáno komplikací samotné problematiky.Náš výklad je proto značně zjednodušený.
V gravitačním poli g_{ik} nechť se pohybuje volná zkušební částice.Pokud by náš prostoročas byl prostoročasem STR a v něm jsme užívali pseudokartézkých souřadnic,byl by pohyb $x^i=x^i(s)$ naší volné částice určen rovnicemi

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}=0.$$

Poznačme,že částicí rozumíme i foton,v tomto případě ovšem nemůžeme za parametr vzít ani veličinu s ani vlastní čas,vezmeme prostě parametr jiný.
Z hlediska geometrie jde patrně o rovnici přímky.Einstein si všimnul toho,že vlastnost takovéto křivky, extrémálnost její délky,může být skvěle využita k řešení nalezení pohybových rovnic pro volnou testovací částici nacházející se v gravitačním poli.V diferenciální geometrii se obecně křivky mající extrémální vlastnosti své „délky" nazývají geodetikami.Od předchozí rovnice se liší tím,že se na levou stranu přidá ještě jeden člen.Ten obsahuje první derivace metrického tensoru,v inerciálních systémech v běžných (pseudokartézkých) souřadnicích vymizí.Rovnice geodetiky jsou pohybovými rovnicemi hmotného bodu pohybujícího se v gravitačním poli g_{ik}.
Jde-li o obecně relativistické pohybové rovnice v případě,že hmota je rozložena spojitě,situace vyžaduje složitější úvahy.Takovou hmotu,jak už víme,popíšeme deseti funkcemi T_{ik} ,symetrickým tensorem energie a hybnosti.Ze STR víme,že pohybové rovnice této hmoty mají tvar

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}\equiv T^{ik}{}_{,k}=0.$$

Čárkou jsme vyjádřili parciální derivaci podle konkrétní souřadnice.
To jsou čtyři rovnice,poslední tři vyjadřují vlastní tři pohybové rovnice a rovnice první je rovnicí zákona zachování hmoty.Uvedené rovnice nesplňují obecný princip relativity a aby tomu tak bylo,musíme zobecnit na zakřivené prostoročasy pojem parciální derivace.Jde to.Vytvoří se pojem kovariantní derivace.Není to nic tak složitého,k parciálním derivacím se prostě přidají dva členy,oba jsou vytvořeny derivacemi metrických koeficientů.Místo vyznačení čárkou pro parciální derivaci se vyznačí středníkem takže taková obecně relativistická pohybová rovnice má tvar

$$T^{ik}{}_{;k}=0.$$

Můžete si říci,že jsme se k této rovnici dostali dosti složitou cestou.Bylo to ale záměrně,abychom si mohli vychutnat ten další podstatný rozdíl.Když se totiž zadíváme na levou stranu Einsteinových gravitačních rovnic z matematického hlediska,zjistíme,že kovariantní derivace levé strany je rovna nule identicky, musí tudíž být rovna nule i kovariantní derivace pravé strany,tj.musí platit předchozí rovnice!
To je ona další a podstatná novinka.V OTR tedy nepřidáváme k pohybovým rovnicím pole zvlášť pohybové rovnice hmoty,která toto pole budí.Prof.Wheeler to krásně formuluje tvrzením,že hmota říká prostoru jak se má zakřivovat a prostor říká hmotě jak se v něm má pohybovat!

LINEÁRNÍ PŘIBLÍŽENÍ

O slabém gravitačním poli jsme se zmínili,ale jen velmi letmo.Vzhledem k důležitosti výsledného obecného tvaru Einsteinových gravitačních rovnic v tak zvané lineární aproximaci je potřeba se touto aproximací alespoň trochu zabývat.

Vyjdeme z předpokladu,že v prostoročasu existuje metrika,která je blízká Minkowského metrice η_{ik} známé ze speciální teorie relativity a že tedy můžeme psát

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}(x^m), \qquad |h_{ik}| << 1.$$

Budeme předpokládat, že nejenom všechny veličiny h_{ik} jsou malé ve srovnání s jedničkou,ale v lineární aproximaci budeme za malé považovat také lineární členy v derivacích.Pro jednoduchost položíme kosmologickou konstantu rovnou nule, její hodnota je vskutku dnes nepatrná. V kosmologii je ovšem velmi důležitá.My se k ní proto,ve druhém a ve třetím příspěvku této série vrátíme.
Napsat linearizované Einsteinovy gravitační rovnice vyžaduje ne těžký ale zdlouhavý výpočet. Půjde-li nám o linearizované Einsteinovy gravitační rovnice v oblastech,kde je,přivede zmíněný výpočet k jejich kouzelnému tvaru

$$\Delta h_{ik} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial t^2} = 0.$$

a to je již z elektrodynamiky známá vlnová rovnice.Naše slabé gravitační pole se tedy ,obecně řečeno,může šířit ve tvaru gravitačních vln !
To je problematika zcela dnešní,experimentálně a teoreticky nesmírně závažná a složitá.My se k ní proto,samozřejmě,musíme vrátit a vrátíme se.

SCHWARZSCHILDOVO ŘEŠENÍ

Každé exaktní řešení Einsteinových gravitačních rovnic má svůj specifický půvab i důležitost. Taková řešení v sobě totiž obsahují samu podstatu nelineárnosti této teorie.A nelineárnost fundamentálních rovnic je,kromě jiného,i velmi důležitou jak ve vztahu k testování,tak v aplikacích.A to nemluvím o hlubším chápání podstaty samotné teorie.
Každý fyzik ví,že k úspěšnému hledání exaktních řešení v konkrétní fyzikální teorii leží úvodní užití předpokladu o symetrii úlohy.Velmi jednoduchou symetrií je jistě symetrie rovinná či symetrie sférická.My si všimneme nyní (stručně a orientačně) nalezení exaktního a sféricky symetrického řešení Einsteinových gravitačních rovnic a to vně svého sféricky symetrického zdroje.Mluví se o sféricky symetrickém exaktním vakuovém řešení Einsteinových gravitačních rovnic.
Zaveďme prostorové sférické souřadnice r , ϑ ,φ a označme x^0=ct, x^1=r, $x^2=\vartheta$, x^3=φ).
Požadavek sférické symetrie vede k možnému startovacímu tvaru pro interval

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right).$$

Funkce ν(r,t) a λ(r,t) jsou zatím neurčené.Položme,jak jsme řekli,pro jednoduchost kosmologickou konstantu Λ položíme rovnu nule a budiž T_{ik} = 0.Zdlouhavý výpočet –ale velmi rychlý,svěříme-li jej počítači,nám ukáže,že nezávislé Einsteinovy gravitační rovnice mají tvar

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0,$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0,$$

$$\dot{\lambda}=0,$$

kde tečka značí derivaci podle času a čárka derivaci podle r.Po jisté úpravě lze ukázat,že řešení těchto rovnic lze psát ve tvaru

$$e^{-\lambda}=e^{\nu}=\left(1+\frac{C}{r}\right),$$

kde C je integrační konstanta.Konstanta se určí z požadavku,aby gravitační pole daleko od svého zdroje vedlo k Newtonovu gravitačnímu zákonu.Vyjde,že

$$C=-\frac{2GM}{c^2}.$$

Výsledný tvar hledaného řešení Einsteinových gravitačních rovnic tedy je

$$ds^2=\left(1-\frac{2GM}{c^2R}\right)c^2dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{c^2r}}-r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right).$$

Vakuové gravitační pole buzené naší sféricky symetrickou hmotou je tudíž plně určeno veličinami

$$g_{00}=\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right),\quad g_{11}=g_{00}^{-1},\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\vartheta.$$

Tomuto exaktnímu řešení Einsteinových gravitačních rovnic se říká (vnější) Schwarzschildovo řešení, pochází z roku 1916 a hraje velmi význačnou roli.

Na jednom a jediném případě jsme demonstrovali ten nejjednodušší a přímočarý postup hledání a nalezení exaktního řešení Einsteinových gravitačních rovnic.V následujících dvou částech naší trilogie se postupům hledání potřebných řešení již nebudeme přímo věnovat, vyjdeme z komentářů týkajících se toho či onoho exaktního řešení a poté je již budeme přímo rozebírat a aplikovat.

Druhá část naší trilogie se bude,jak jsme uvedli v Úvodu, zabývat observačními testy Obecné teorie relativity, tedy problematikou ležící ve středu velkého zájmu zdaleka ne jen fyziků

LITERATURA

Kuchař K.:Základy obecné teorie relativity.Academia Praha 1968
Horský J.:,Úvod do teorie relativity.SNTL Praha 1976