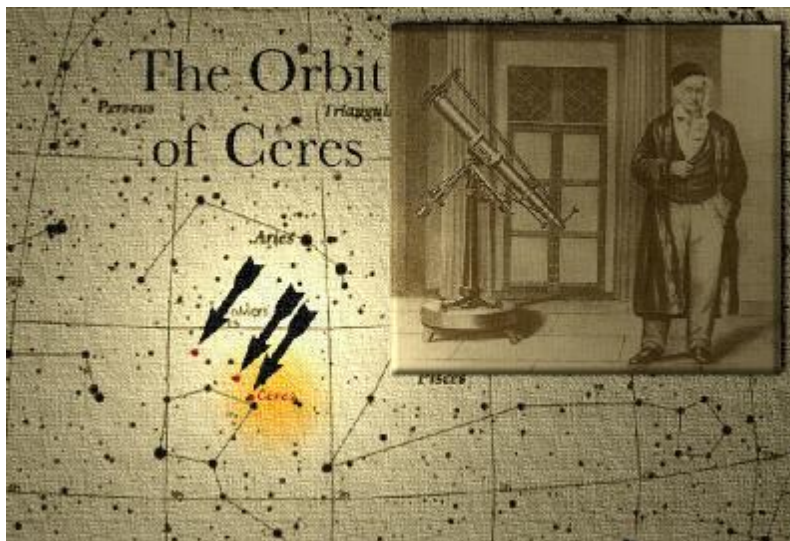


Ke Gaussově metodě určování dráhy planetky Ceres Vladimír Štefl, ÚTFA, PřF, MU, Brno

K. F. Gauss: *To determine the orbit of a heavenly body, without any hypothetical assumption, from observations not embracing a great period of time, and not allowing a selection with a view to the application of special methods.*



Historie moderního výzkumu sluneční soustavy je stará necelá tři století. V druhé polovině 18. století, roku 1766 německý matematik **Johann Daniel Titius (1729 -1796)** objevil závislost průměrné vzdálenosti planety od Slunce původně vyjádřené v tvaru $a = \frac{n+4}{10}$, kde $n = 0, 3, 6, 12, 24, 48$. V roce 1772 byla závislost uveřejněna německým astronomem **Johannem Elertem Bodem (1747 – 1826)** jako tzv. Titiova – Bodeova řada ve tvaru $a = 0,4 + 0,3 \times 2^n$, kde $n = -\infty, 0, 1, 2, 3 \dots$

Když anglický astronom **William Herschel (1738 – 1822)** objevil v roce 1781 Uran, propočítaná velikost velké poloosy jeho dráhy činila $a = 19,2$ AU a splňovala tak Titiovu – Bodeovu řadu dávající $a = 19,6$ AU.

Pod vedením rodáka z dnešní Budapešti **Franze Xavera von Zacha (1754 – 1832)**, později astronoma v německém městě Gotha, započala roku 1799 evropská pozorovací astronomická kampaň hledání planety mezi Marsem a Jupiterem pro $a = 2,8$ AU. Sdružení astronomů nazývané „**nebeská policie**“, kam patřili např. J. E. Bode, W. Herschel, H. W. M. Olbers, N. Maskelyne, J. H. Schröter, G. Piazzi, zkoumalo především objekty podél ekliptiky.

Italský matematik a astronom z Palerma **Giuseppe Piazzi (1746 – 1826)** prvního ledna roku 1801 ve 20h 43min místního času našel objekt, který se během noci posunul o $4'$ k severozápadu. Vzhledem k hvězdnému poli v pozadí se během dalších dnů přemísťoval. Piazzi



popsal svůj objev takto: „Pozoroval jsem 1. ledna poblíž ramena Býka objekt s hvězdnou velikostí osmé magnitudy, který se dalšího večera 2. ledna posunul o 3'30“ přibližně k severu o 4' ke znamení Berana“...

Sledování prováděl do 11. února 1801, kdy se objekt přiblížil ke Slunci a přestal být pozorovatelný. Celkově Piazzí sledoval objekt 41 nocí, získal údaje o 21 úplných pozorováních, v nichž zachytil zhruba 9° jeho dráhy kolem Slunce. Objekt obdržel jméno Ceres Ferdinanda na počest bohyně úrody a sicilského mecenáše krále Ferdinanda IV., který nechal v Palermu hvězdárnu postavit. Pozorovaný objekt původně Piazzí považoval za kometu, později ho astronomové zařadili jako osmou planetu sluneční soustavy ležící mezi Marsem a Jupiterem, neboť splňovala vzdáleností $a = 2,8$ AU od Slunce Titusovu–Bodeovu řadu. Až po roce 1850 se změnil jeho statut na planetku.

Úplná Piazzího pozorování byla publikována v září 1801 v *Monatliche Correspondenz*. Během září 1801 provedl německý matematik a astronom **Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855)** propočet dráhy. Pro výpočty vybral Gauss tři pozorování: 2. ledna, 22. ledna a 11. února. Zachycovala retrográdní pohyb od 1. ledna do 11. ledna, kdy objekt přešel opět k přímému pohybu. Do listopadu 1801 Gauss upřesnil dráhové elementy, velká poloosa $a = 2,7673$ AU, oběžná doba $T = 1\,681$ dnů, excentricita $e = 0,0825$ a sklon dráhy $i = 10^{\circ} 36' 57''$.



Dále spočítal předpokládané ekliptikální souřadnice na dny 25. 11.- 31. 12. 1801, v intervalech šesti dnů. S jejich pomocí již zmiňovaný Franz Xaver von Zach objekt - planetku znovu objevil 7. prosince a následně také 1. ledna 1802. Polohy se shodovaly s Gaussovým výpočtem na 20'. Novou planetku sledoval v lednu 1802 rovněž **Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers (1758 – 1840)**, který později objevil i další planety Pallas a Vestu. Ještě v témže roce 1802 navrhl Herschel pro nové objekty souhrnný název *asteroidy*.

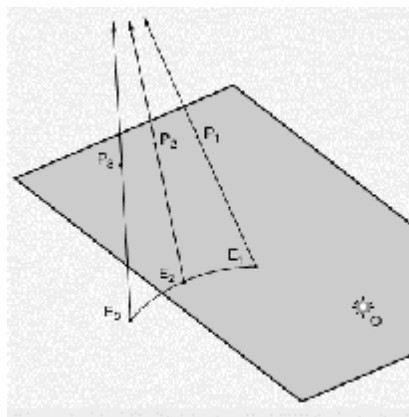
Obecnou metodu výpočtu dráhy kosmického tělesa ze tří pozorování Gauss uveřejnil v spise sepsaném původně německy *Theorie der Bewegung, der in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Himmelskörper*, známější je latinská verze *Thoria motus corporum coelestium in sectionibus conicus solem ambientium* česky *Teorie pohybu kosmických těles pohybujících se kolem Slunce po kuželosečkách* z roku 1809. Spis se skládá ze dvou knih. První *Obecné vztahy mezi veličinami, kterými je pohyb kosmických těles kolem Slunce definován* a z druhé *Studium drah kosmických těles z geocentrických pozorování*. Gaussův výklad se opíral o čtyři věty, které jsou důsledkem platnosti Keplerových zákonů:

1. Pohyb každého kosmického tělesa probíhá v stálé rovině, v níž leží střed Slunce.
2. Dráha opisovaná kosmickým tělesem je kuželosečka, jejíž ohnisko je ve středu Slunce.
3. Pohyb kosmického tělesa po dráze probíhá tak, že plochy výsečí opisované kolem Slunce v různých časových intervalech jsou úměrné těmto intervalům. Jestliže plochy a časy vyjádříme pro zvolený úhlový sektor číselně, vždy je jejich podíl stejný.
4. Pro různá kosmická tělesa obíhající kolem Slunce platí, že odpovídající podíly ploch a časů jsou úměrné druhým odmocninám polovičních parametrů drah.

Gaussem vyvinutý postup vycházel z geometrie a algebry, řečeno současnou terminologií použil aplikovanou matematiku. Nejprve promyslel do všech důsledků jednotlivé kroky celkového prostorového řešení, včetně započtení relativnosti pohybu planety, kterou pozoroval Piazzzi z pohybující se Země. Následně provedl konkrétní numerické výpočty, jenž vyžadovaly od autora stovky hodin práce.

Náš výklad bude zachycovat jednotlivé vybrané klíčové kroky Gaussova geometrického postupu, který bylo důvtipný a pohledem současné astronomie překvapující. Při aplikaci diachronního přístupu vycházíme ze znalostí, které ve své době Gauss mohl mít. Využil metodu syntetické geometrie, kterou v novější době rozvinuli **Gérard Desargues (1591 – 1661)**, **Gaspard Monge (1746 – 1818)**.

Gauss provedl transformaci problému z plošného na prostorový, když použil poměrně komplikované řešení s větším množstvím proměnných ve třech různých souřadných soustavách prostřednictvím algebry a geometrie. Zjistil, že k určení její prostorové dráhy je zapotřebí šesti dráhových elementů. Ze tří pozorování získal vždy po dvou konstantách, celkem tedy šest konstant. Vzhledem k tomu, že planeta Ceres byla pozorována v nevelkém časovém intervalu, bylo možné zanedbávat gravitační působení ostatních kosmických těles. Z pozorovacích údajů Piazzziho si Gauss zvolil polohu planety v následujících dnech:



| | rektascenze | deklinace |
|-----------|-------------|--------------|
| 2. ledna | 51° 47' 49" | 15 ° 41' 5" |
| 22. ledna | 51° 42' 21" | 17 ° 3' 18" |
| 11. února | 54° 10' 23" | 18 ° 47' 59" |

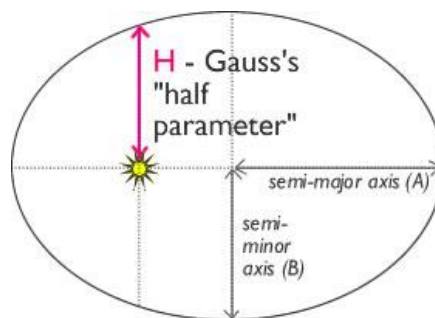
Pomocí dvou úhlů – rektascenze a deklinace z Piazzioho údajů Gauss stanovil tři směry, v kterých se sledovaná planetka nachází. Směry však neurčovaly dráhovou rovinu, na které se planetka pohybovala.

Planetka Ceres jevila mezi 1. a 11. lednem 1801 ze Země zpětný pohyb. Retrográdní pohyb a smyčka jsou způsobeny rozdílnou rychlostí pohybu Země a Ceres, kombinací jejich relativních poloh v kosmickém prostoru. Oběžný pohyb Země kolem Slunce je rychlejší než Ceres. Sledovaný pozorovaný pohyb je ještě komplikován tím, že obě kosmická tělesa obíhají v různých dráhových rovinách. V průběhu Piazzioho pozorování postupně narůstala vzdálenost Ceres od ekliptiky v rozmezí $15^\circ \rightarrow 18^\circ$.

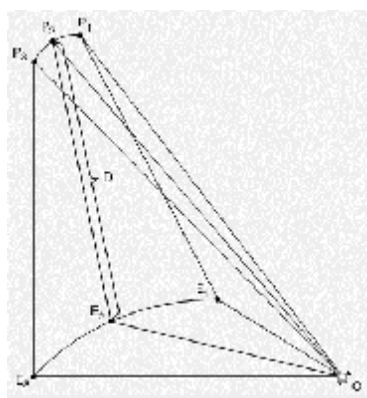
Piazzi získal tři polohy planety Ceres na světové sféře. Nebyla jimi zachycena skutečná dráha v prostoru, dokonce ani jednoduchá projekce dráhy na světovou sféru. Důvodem byl současný pohyb planety Ceres a Země. Za pomoci Keplerových zákonů Gauss propočítal přesnou polohu Země na její dráze, vzdálenost a polohu vzhledem k Slunci.

Při řešení problému Gauss vycházel jak ze známých vlastností elipsy, např. plochy rovné $S = \pi \cdot A \cdot B$, tak sám zavedl další matematické parametry. Například speciální parametr pro pohyb po eliptické dráze jako hodnotu podílu plochy úhlového sektoru a uplynulého času, který je konstantní a rovný $\pi \cdot \sqrt{H}$, kde H je Gaussův poloviční parametr, tzv.

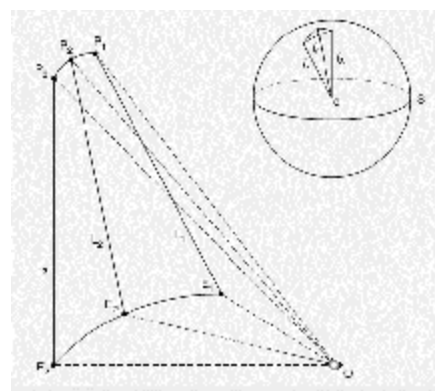
šířka elipsy v místě ohniska, rovná $H = \frac{B^2}{A}$.



Prvním Gaussovým krokem bylo stanovení vzdálenosti Ceres – Země, zvolil vzdálenost při druhém pozorování $E_2P_2 = D$. Druhým bylo určení vzdálenosti obou těles



při prvním a třetím pozorování.



Další Gaussovou myšlenkou bylo přenesení směrů L_1, L_2, L_3 na imaginární sféru S prostřednictvím jednotkových dílů l_1, l_2, l_3 . Obdobně na sféře zachytil směry dalších úseček OE_1, OE_2, OE_3 a OP_1, OP_2, OP_3 . Mohl tak na sféře zkoumat úhlové vztahy.

Klíčovou myšlenkou bylo zavedení ploch úhlových sektorů S_{12} a S_{23} pro intervaly z P_1 do P_2 a z P_2 do P_3 . Pomocí Gaussových vět, byly stanoveny podíly velikostí ploch a odpovídajících časových intervalů $\frac{S_{12}}{t_2 - t_1}$, $\frac{S_{23}}{t_3 - t_2}$, $\frac{S_{13}}{t_3 - t_1}$. Připomínáme, že Piazzini zaznamenal

střední sluneční čas všech svých pozorování, Gauss tak znal jmenovatele uvedených zlomků, proto získal

$$\frac{S_{12}}{S_{23}} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} = 0,949$$

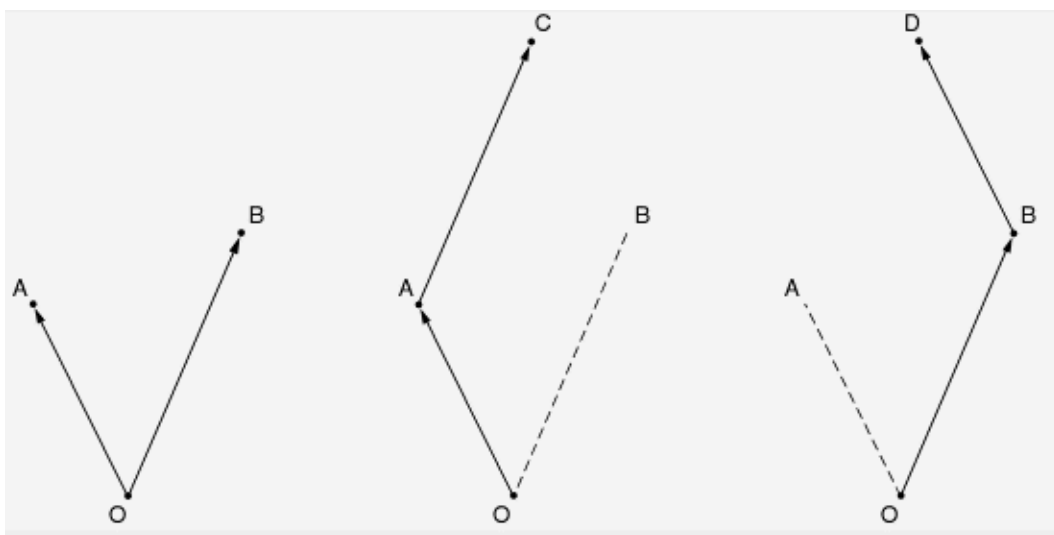
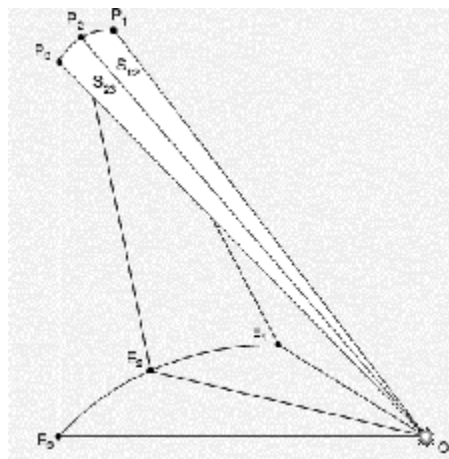
$$\frac{S_{12}}{S_{13}} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} = 0,487$$

$$\frac{S_{23}}{S_{13}} = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} = 0,513 .$$

Přestože Gauss neznal přesnou dráhu planety

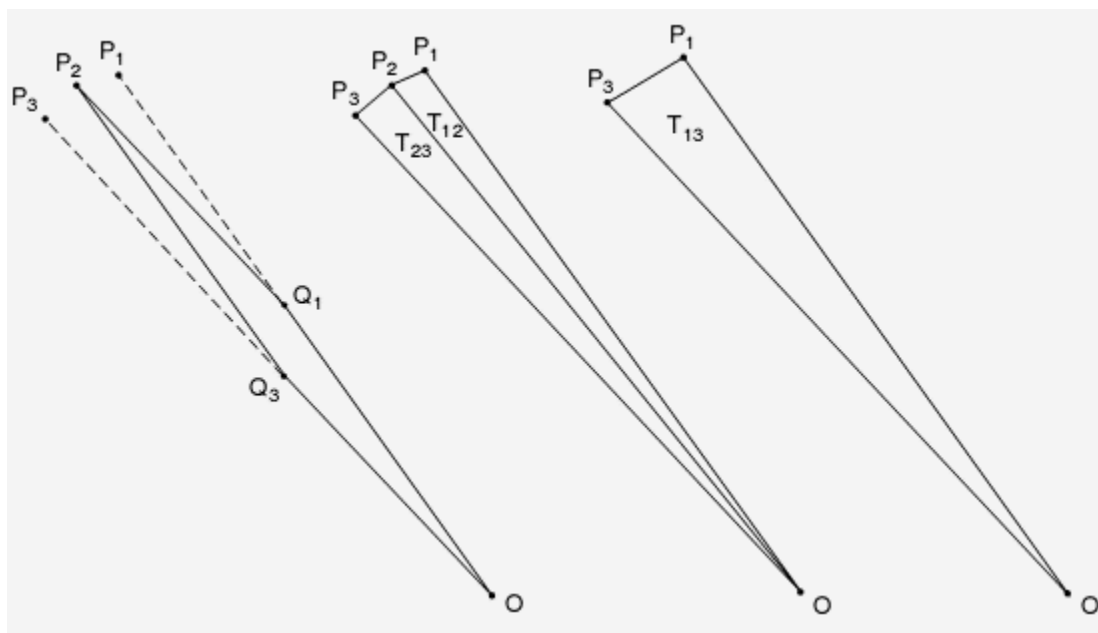
Ceres obdržel přesné hodnoty pro podíly ploch úhlových sektorových a času.

Další obrázek demonstruje *nezávislost pořadí posunutí v rovnoběžníku* při kombinaci posunutí OA a OB.



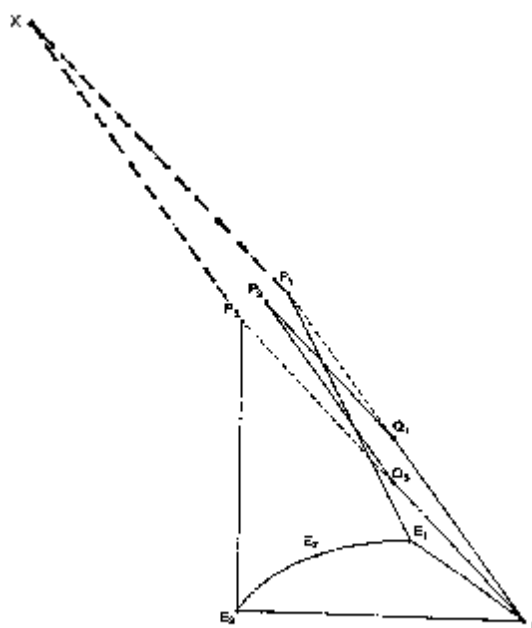
Polohu bodu P_2 vzhledem k bodům P_1 a P_3 obdržíme pomocí rovnoběžníku vzniklého z posunutí OQ_1 a OQ_3 podél přímek OP_1 a OP_3 . Body Q_1 a Q_3 rozdělují části OP_1 a OP_3 v poměru, který lze vyjádřit v časech odpovídajících trojúhelníkovým plochám T_{12} , T_{23} a

$$T_{13} . \text{ Obdržíme } \frac{OQ_1}{OP_1} = \frac{T_{23}}{T_{13}} \text{ a } \frac{OQ_3}{OP_3} = \frac{T_{12}}{T_{13}} .$$

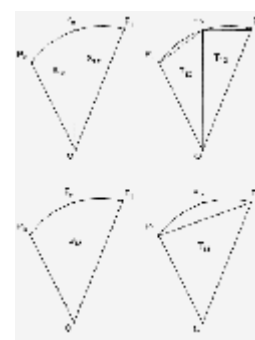


Názornější je Gaussova myšlenka sestrojení rovnoběžníku OP_3XP_1 , ve kterém vrchol X získáme jako průsečík rovnoběžek OP_3 a OP_1 vedených z bodů P_1 a P_3 . Následně rovnoběžka s OP_1 vedená bodem P_2 umožňuje nalézt polohu bodu Q_1 , obdobně rovnoběžka s OP_3 vedená bodem P_2 udává polohu bodu Q_1 .

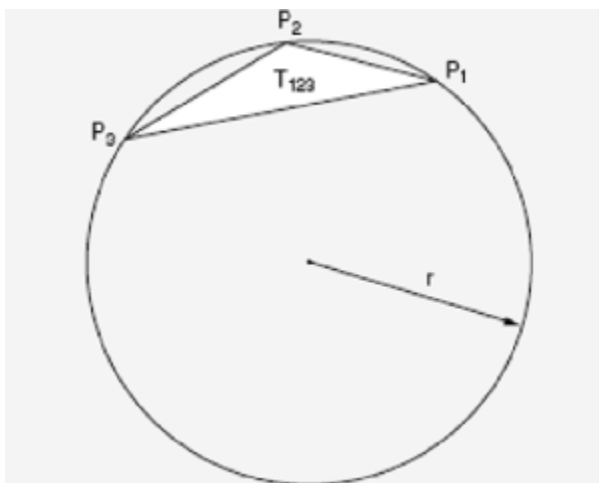
Postup při prostorovém nalezení polohy P_2 byl následující. Výše popsany postup nalezení bodu X Gauss promítl do roviny dráhy Země kolem Slunce, včetně nalezení bodů Q_1' a Q_3' . S pomocí geometrických úvah našel bod X_1' . Průsečík roviny úhlové výseče s vrcholem v bodě X_1' a směru přímky $E_2 P_2$ umožňuje nalézt polohu v prostoru bodu P_2 .



Další důvtipnou myšlenkou Gausse bylo nahrazení ploch úhlových sektorů S_{12} , S_{23} a S_{13} odpovídajícími plochami trojúhelníků T_{12} , T_{23} a T_{13} . Následně vyřešil, v jakém vztahu jsou plochy trojúhelníků a



ploch úhlových sektorů, jejichž poměr znám byl. Na základě znalosti velikosti stran určil plochu $\Delta T_{123} = \frac{P_1 P_2 \cdot P_2 P_3 \cdot P_3 P_1}{4r}$



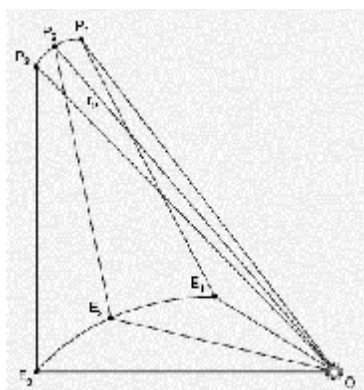
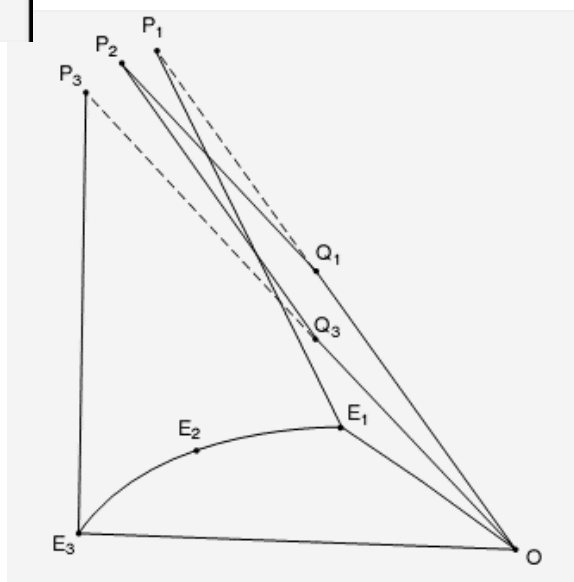
Pozice P_1 , P_2 a P_3 leží na dráze planety Ceres, všechny jsou v dráhové rovině procházející Sluncem. Pohyb Ceres, jak již bylo uvedeno, probíhá v souladu s Gaussovými větami. Vzhledem k tomu, že tři pozice Ceres z Gaussem vybraných pozorování byly

relativně blízké, byl velmi malý rozdíl v plochách odpovídajících sektorů a trojúhelníků. Proto Gauss mohl přibližně psát

$$\frac{T_{23}}{T_{13}} = \frac{S_{23}}{S_{13}} = 0,513$$

$$\frac{T_{12}}{T_{23}} = \frac{S_{12}}{S_{23}} = 0,487 .$$

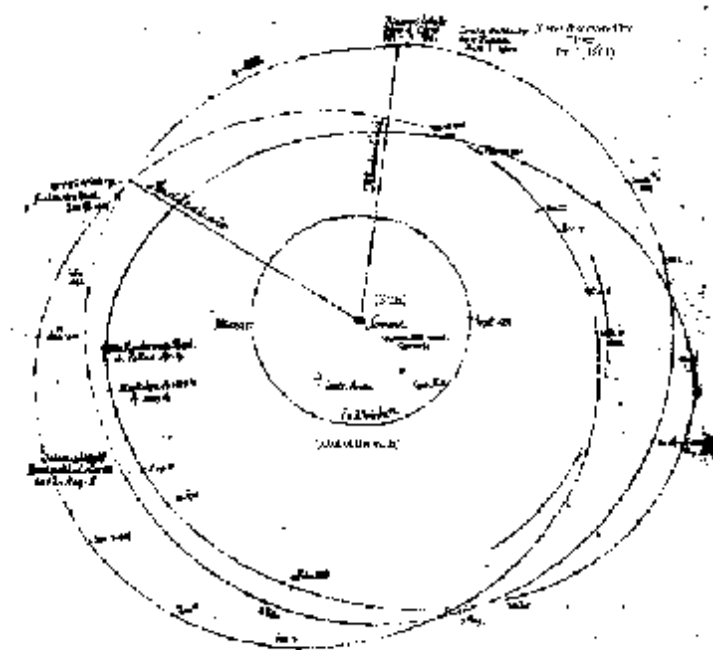
Poměrné vztahy Q_1 , Q_3 k OP_1 a OP_3 byly známy z poměrů uplynulých časů.



Další důležitou určovanou vzdáleností byla vzdálenost Ceres – Slunce r_2 . K jejím upřesnění využil autor tzv. Gaussův korekční faktor $G \cong 1 + \left[2 \frac{p^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{r_2^3} \right]$,

umožňující dosazení do poměru $\frac{S_{13}}{T_{13}} \cong 1 + \left[2 \frac{p^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{r_2^3} \right]$, který je mírně větší než 1. Zach, Olbers a další předpokládali podle Titiovy-Bodeovy řady $a = 2,8$ AU. Ze tří pozorování (poloh a časů) byl určen $G \approx 1,003$. Přesný Gaussův výpočet vedl k hodnotě $a = 2,767$ AU.

Na schematickém obrázku jsou zachyceny propočtené dráhy planetek Ceres a Pallas.



Sketch of the orbits of Ceres and Pallas (nach J.B. Gauss, Handb. 4). Courtesy of Universitätsbibliothek Göttingen.

Princip Gaussem navržené metody, kombinující geometrické a dynamické zákonitosti pohybu planetky po eliptické dráze kolem Slunce, má nadčasovou hodnotu. Matematické zpracování metody aplikací lineární algebry v současnosti umožnilo podstatné urychlení výpočtů. Gaussova metoda modernizovaná pro výpočty na počítači je používána dodnes, například ke stanovení drah umělých kosmických těles.

Literatura:

- [1] Piazz, G.: Risultati delle Osservazioni della Nuova Stella. Palermo, 1801.
- [2] Director, B., Tennenbaum, J.: http://www.schillerinstitute.org/fid_97-01/982_orbit_ceres.pdf
- [3] Gauss, K. F.: Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections. Dover Publications, Inc. Mineola, New York 2004.
- [4] Zach, F. X.: Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde. 1809.
- [5] Gauss, K. F.: Summarische Übersicht der Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden – 1802 (Gauss Werke, v. 6, p. 148 – 165).
- [5] Gauss, K. F.: Summary Overview of the Method Used to Determine the Orbits of the Two New Planets.
<http://www.wlym.com/~animations/ceres/PDF/SummarischeUebersicht.pdf>

[6] Forbes, E. G.: Gauss and the Discovery of Ceres. *Journal for the History of Astronomy* 1971, No. 2, p. 195 - 199.

[7] Foderá, S. G., Manara, A., Sicoli, P.: Giuseppe Piazzi and the Discovery of Ceres.

www.lpi.usra.edu/