

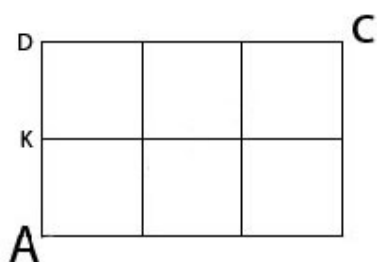
ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů.“

Domnívám se, že vhodným modelem mnoha kombinatorických úloh a úloh z počtu pravděpodobnosti jsou jisté grafové struktury nazývané stromy, či stochastické stromy. Ukažme si jejich konstrukci a použití při řešení několika jednoduchých úloh.

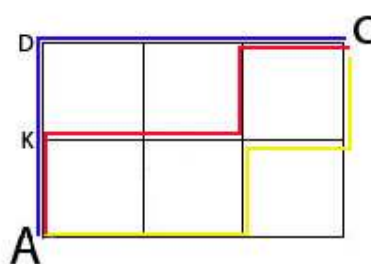
Příklad 1.

Obrázek 1 vznikl zjednodušením plánu části sídliště ( jsou zakresleny pouze cesty). Kolika různými způsoby je možné dojít z místa A do místa C, jestliže nebloudíme, což znamená, že se pohybujeme vodorovně zleva doprava a ve směru svislém zdola nahoru. Cesty mimo vyznačenou čtvercovou síť jsou nepřipustné.

Obrázek 1.



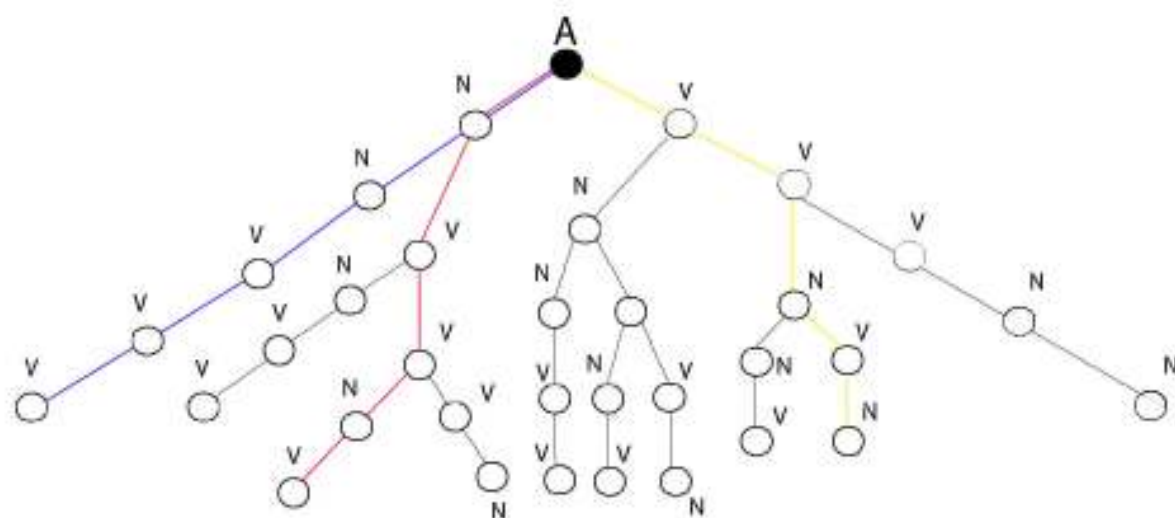
Obrázek 2.



Řešení:

Žáci si mohou do plánu barevně zakreslovat jednotlivé cesty, jak je ukázáno na obrázku 2. Zjistí, že tento způsob řešení úlohy je pracný a nepřehledný. Popíšeme nyní postup, jakým můžeme sestavit grafický model – tzv. strom. Kořenem stromu je bod A, ze kterého vycházíme. Z bodu A se můžeme vydat buď vpravo (V) nebo nahoru (N), vzniknou nám tedy dvě základní větve stromu. Když jsme šli nahoru, dostali jsme se do bodu K, v němž se opět můžeme rozhodnout, zda půjdeme nahoru, či vpravo. V případě, že jsme pokračovali nahoru, dostali jsme se do bodu D. Zde se již nemůžeme rozhodovat, kudy půjdeme. Ale musíme jít 3 krát vpravo, abychom se dostali do bodu C. Tomuto sledu našich rozhodnutí odpovídá levá krajní větev stromu na obr. 3. Barevně vyznačené cesty na obrázku 2 odpovídají stejně barevně vyznačeným větvím stromu na obrázku 3. Z obrázku 3 je zřejmé, že z bodu A do bodu C se lze dostat 10 různými způsoby, pokud „nebloudíme“.

Obrázek 3.



Příklad 2.

V jakém sledu mohly padat góly v hokejovém utkání Vítkovic proti Nymburku, které skončilo 3:2 pro Vítkovice.

Řešení:

Žáci mohou začít vypisovat jednotlivé výsledky utkání například takto:

1:0, 1:1, 2:1, 3:1, 3:2;	1:0, 2:0, 3:0, 3:1, 3:2;	1:0, 1:1, 1:2, 2:2, 3:2;
0:1, 0:2, 1:2, 2:2, 3:2;	0:1, 1:1, 2:1, 2:2, 3:2;	0:1, 1:1, 1:2, 2:2, 3:2; atd.

Pro řešení můžeme opět použít strom. Označíme-li gól, který daly Vítkovice písmenem V a gól, který dal Nymburk písmenem N, obdržíme stejný strom jako v předchozí úloze. Větev vyznačená modře odpovídá následujícímu průběhu: 0:1, 0:2, 1:2, 2:2, 3:2, větev vyznačená červeně: 0:1, 1:1, 2:1, 2:2, 3:2 a větev vyznačená žlutě: 1:0, 2:0, 2:1, 3:1, 3:2. Z obrázku 3 je zřejmé, že zápas se mohl vyvíjet 10 různými variantami. Z grafu také můžeme určit průběhy, ve kterých Vítkovice neustále vedly: jsou to poslední dvě větve na pravé straně stromu, jedna z větví je žlutě vyznačená.

Příklad 3.

Kolik různých pěticiferných čísel je možno sestavit z číslic 3 a 7 tak, že číslice 7 se vyskytuje v každém čísle právě dvakrát.

Řešení:

Můžeme je nejjednodušeji získat užitím stromu na obrázku 3 tak, že písmeno N nahradíme číslicí 7 a písmeno V číslicí 3. V jednotlivých větvích pak dostaneme hledaná čísla. Modře vyznačené větvi odpovídá číslo 77333, červeně vyznačené větvi odpovídá číslo 73373 a žlutě vyznačené větvi odpovídá číslo 33773. Hledaných čísel je tedy opět 10.

Ve všech třech příkladech jsme použili stejný matematický model – strom, díky němuž jsme efektivně a názorně vyřešili různé problémy. U úloh, které jsou symetrické není nutné sestavovat celý strom, stačí zakreslit jen jeho část, ostatní možnosti lze dopočítat využitím symetrie. Příklad 1 by se stal symetrickým, kdyby plánec sídliště byl čtverec, pak by byl strom symetrický podle svislé osy procházející bodem A. V další úloze jsme znázornili celý strom což pro řešení úlohy není nezbytně nutné. Při opakovaném používání stromů stačí znázornit počet větví a počet možností v jedné větvi a zbytek dopočítat.

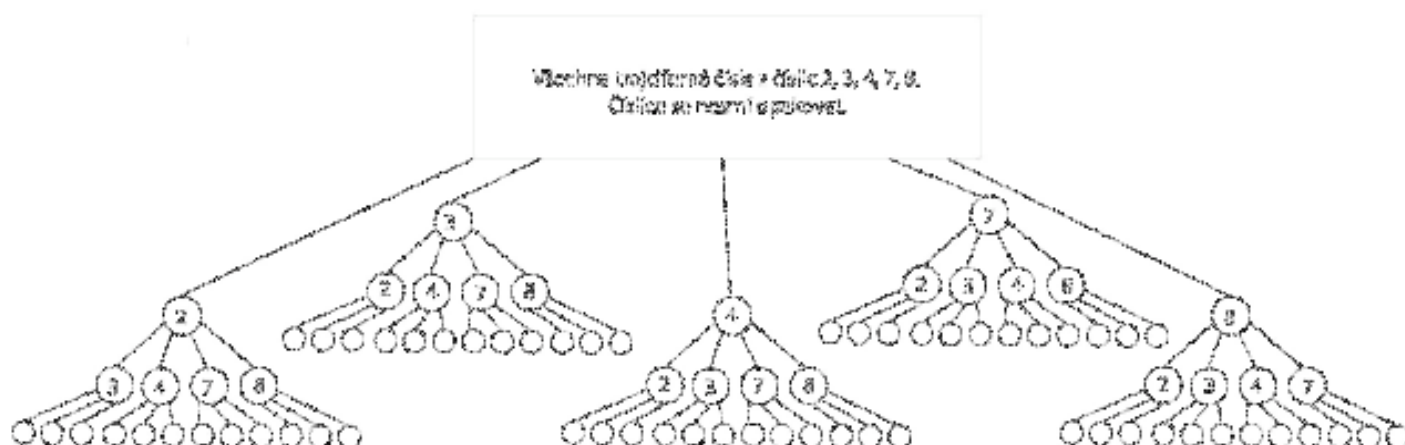
Příklad 4.

Z číslic 2, 3, 4, 7, 8 sestavte všechna trojčíselná čísla, v nichž se žádná z daných číslic neopakuje. Kolik čísel lze za takto daných podmínek sestavit?

Řešení:

Použijeme opět strom, který je zakreslen na obrázku 4. Lehce spočítáme, že hledaných čísel je  $5 \cdot 12 = 60$ .

Obrázek 4.



Vypišme všechna čísla, která začínají číslicí 4: 423, 427, 428, 432, 437, 438, 472, 473, 478, 482, 483, 487.

Grafová struktura dobře znázorňuje kombinatorické pravidlo součinu: na místě stovek se může vyskytovat kterákoli z pěti zadaných číslic, tedy máme 5 možností. Na místě desítek se mohou vyskytovat zbývající čtyři číslice a na místě jednotek pouze tři číslice.

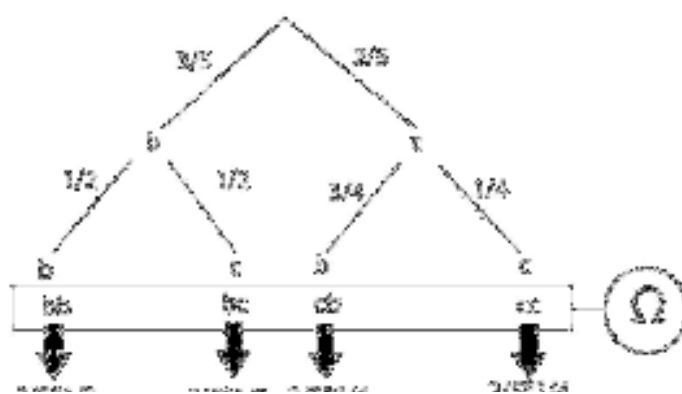
Příklad 5.

V krabici, ve které jsou tři bílé a dvě červené hmatem nerozeznatelné kostky, bude vybrána dvakrát kostka bez vracení. Dříve než kostky vybereme, tipuje hráč barvu postupně vybraných kostek. Když správně uhádne výsledek, získává bod. Má tato hra racionální strategii?

Řešení:

V tomto případě použijte takzvaný ohodnocený strom. Čísla zapsaná u jednotlivých větví stromu udávají pravděpodobnost, s jakou nastane příslušný jev, vytažení bílé (b), nebo červené kostky (c). Obrázek 5 představuje takovýto strom. Omega znázorňuje množinu všech možných jevů. Protože pravděpodobnost  $P(bb) = 0,3$ ,  $P(bc) = 0,3$ ,  $P(cb) = 0,3$  a  $P(cc) = 0,1$ , není racionální tipovat, že budou vytaženy 2 červené kostky.

Obrázek 5.



Můžeme shrnout, že stochastický strom slouží na:

1. konstrukci množiny výsledků náhodného pokusu probíhajícího po etapách,
2. určení rozdělení pravděpodobnosti na této množině,
3. určení pravděpodobnostního prostoru.

Literatura:

- [1.] Plocki, A. Pravděpodobnost okolo nás, Katolická univerzita, Rožomberok 2004 ISBN 80-89039-51-0.
- [2.] Blažková, R. *Využití stromových struktur ve výuce matematiky*. In Sborník příspěvků z XIV. Vědeckého kolokvia o řízení osvojovacích procesů, VVŠ PV Vyškov, (1996)
- [3.] Kemeny, J., G., Snell, J., L., Thompson, G., L. *Úvod do finitní matematiky*. Praha, SNTL, (1971).
- [4.] Novotná, J. *Matematika v Mendelových objevech*. In Matem. a didaktika matem., Sborník prací, č.171, Brno, Katedra matematiky, Pedagogická fakulta MU v Brně, (2003). ISBN 80-210-331-8.

Adresa autora: PhDr. Jiřina Novotná, Ph.D., katedra matematiky, Pedagogická fakulta MU, Poříčí 31, 603 00 Brno, [novotna@ped.muni.cz](mailto:novotna@ped.muni.cz), tel.č.549491663