

GEOMETRIE A POČÍTAČ

LENKA LOMTATIDZE

Počítače dnes v praxi nahradily náročné ruční rýsování, to je nepřehlédnutelným faktem. Je dobře, že se postupně tomuto trendu přizpůsobuje i výuka geometrie. Nejsem zastáncem toho, aby počítač vymýtil konstruování základních úloh na papíře či dokonce „ruční“ vytváření náčrtků, obdobně jako není žádoucí, aby žáci používali kalkulačky pro malou násobilku. Počítače nám však mohou pomoci výuku mnoha předmětů zefektivnit. V geometrii se jedná především o usnadnění rutinní práce při některých konstrukcích či výpočtech, snadnější zvládnutí partií náročných na představivost a přesnost rýsování. Více na toto téma viz např. [1], [2].

Tento příspěvek ukazuje některé z možností, jak začlenit počítač do výuky geometrie. Je určen nejen učitelům matematiky, ale i učitelům, kteří hledají inspiraci pro hodiny výpočetní techniky. K práci je zapotřebí výukový program pro geometrii **Cabri Géomètre II** (dále jen Cabri). Volně šiřitelnou demoverzi spolu s dalšími informacemi o programu lze najít např. na

<http://www.math.muni.cz/~mlc/geom/cabri.html>.¹

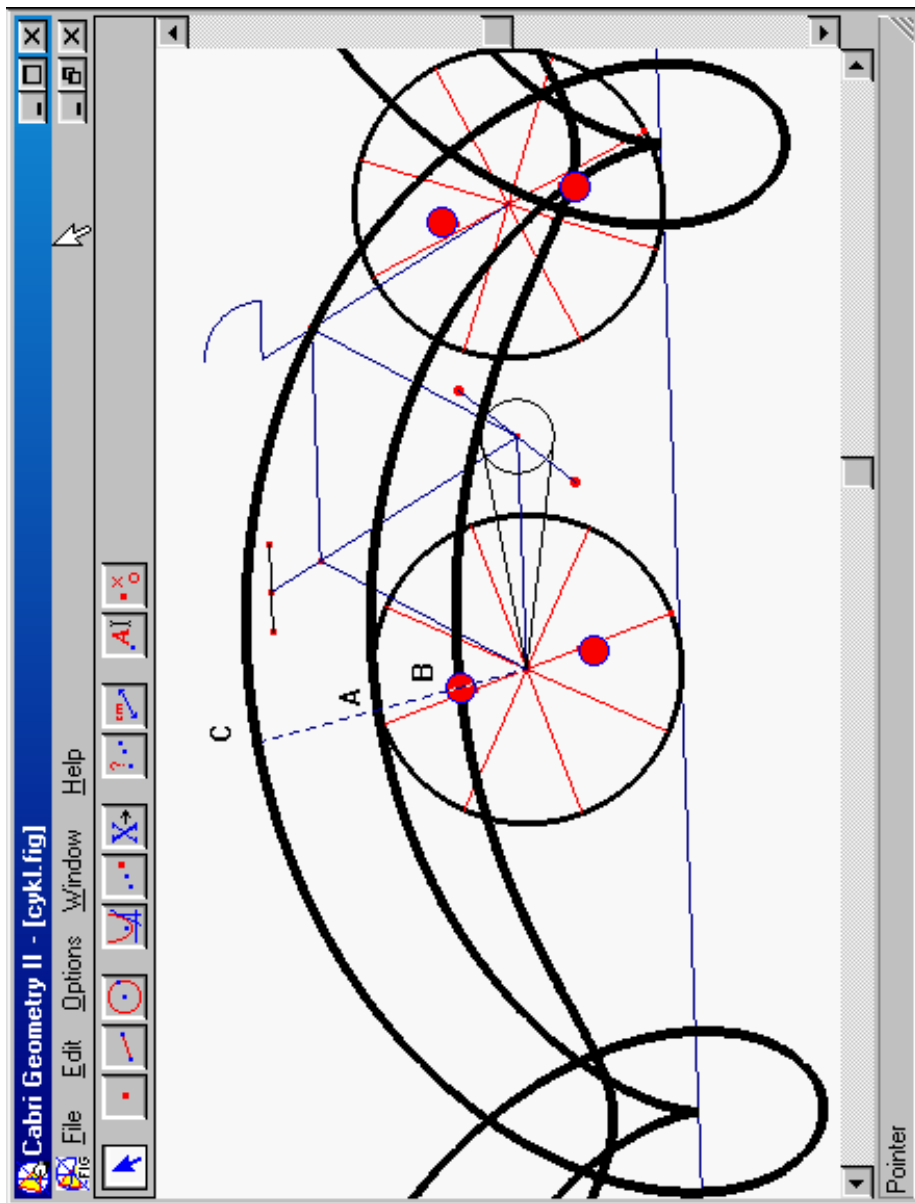
Program se ovládá obdobně jako jiné aplikace Windows, tj. pomocí roletového menu a ikon na pracovních lištách. Především však, že tento příspěvek není kurzem ovládání Cabri. Podle mých dosavadních zkušeností se studenty, je základní ovládání natolik intuitivní, že se s ním může každý seznámit samostatně, proto se budu věnovat jen popisu složitějších funkcí programu. V případě problémů lze použít např. kurz Cabri geometrie:

<http://home.pf.jcu.cz/~vanicek/cabri/kurz/>.

Program obsahuje dobrou nápovědu: stiskem F1 se zobrazí v dolní části kreslicí plochy okno, ve kterém se vypisuje popis aktivní ikony. Na ikony se budu při popisu odvolávat v souladu s jejich rozložením zleva doprava A, B1, B2, B3, C1, C2, C3, D1, D2, E1, E2 (viz obr. 2), toto označení koresponduje s označením použitým v uvedeném kurzu.

Každá část je věnována demonstraci úloh vybraných z jedné oblasti geometrie. Úlohy jsou voleny tak, aby ukázaly nadstandartní možnosti počítače, tj. demonstrují konstrukce, které jsou „ručně“ těžko proveditelné či pracné, popřípadě využívají animace a dalších nástrojů Cabri.

¹Cabri Géomètre II je jeden z nejdostupnějších a nejrozšířenějších výukových software u nás. Spustitelnost na všech typech Windows a intuitivní ovládání pomocí ikon, ho činí snadno přístupným širokému spektru uživatelů. (S minimálními rozdíly běží i pod DOSem nebo na Mackintosh).



Obrázek 1. Cykloidy – křivky, které vytvoří bod pevně vázaný ke kružnici při tzv. kotálení kružnice po přímce. Např. při jízdě na kole vytvoří bod na povrchu pláště (A) prostou cykloidu, bod uvnitř (B) zkrácenou cykloidu a představíme-li si bod vně kola, opět pevně s tímto kolem svázaný, pak obdržíme prodlouženou cykloidu (C).

Obtížnost úloh se stupňuje a to jak z hlediska geometrických znalostí, tak z hlediska náročnosti počítačového zpracování. Od jednoduchých příkladů dojdeme až ke konstrukcím takového typu, jako jsou křivky na obr. 1. Při přípravě úloh byly uvažovány dvě cesty, jak tento materiál využít (příčemž lze samozřejmě kombinovat oba způsoby):

- (1) učitel demonstruje konstrukci na počítači,
- (2) žáci zpracovávají úlohy sami.

Záleží jen na vás (a na podmínkách, které máte na pracovišti).

V závěru této úvodní části bych ráda poznamenala, že na internetu lze najít řadu dalších materiálů, jak dále využívat Cabri při výuce [3]. Tento příspěvek si klade za cíl, usnadnit první kroky těm, kteří s počítačem začínají nebo nemají k internetu stálý přístup.

Věřím, že si práci s Cabri oblíbíte a najdete inspiraci k řešení mnoha dalších geometrických úloh. Všechny vaše dotazy a připomínky jsou vítány na adrese mlc@math.muni.cz.

Část 1. Trojúhelník

Příklad 1: Je dán libovolný trojúhelník ABC . Sestrojte kružnici k jemu opsanou a kružnici l jemu vepsanou.

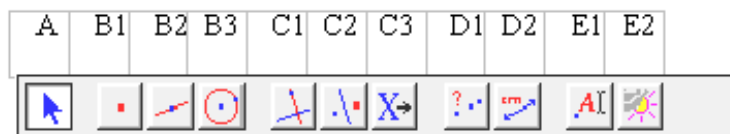
Vytvořte trojúhelník ABC pomocí *Trojúhelník* (v nabídce pod ikonou B2, kompletní nabídka se ukáže, pokud přidržíme stlačenou myš na ikoně).

Osu strany AB sestrojte pomocí konstrukce *Osa úsečky* (C1) tak, že ukážete na tuto stranu myší; obdobně osy stran BC , AC . Společný bod os označte O .

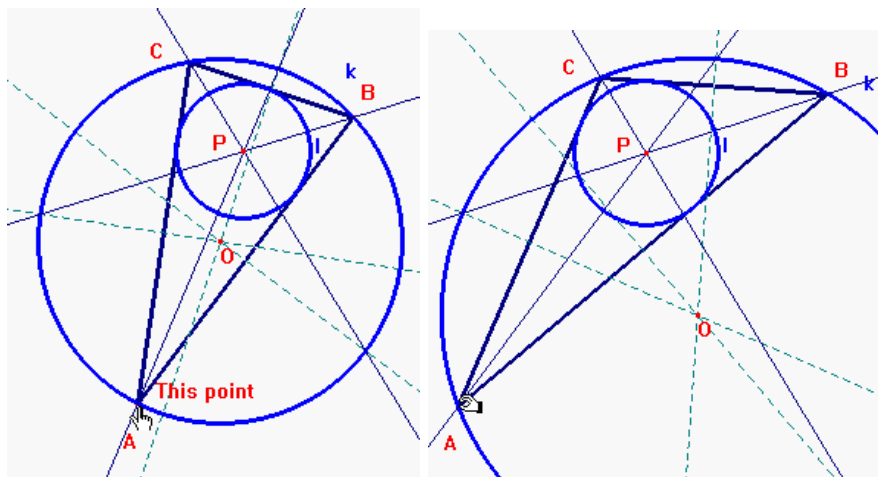
Pohybuje vrcholy A , B , C po nákrese (A). Pozorujte polohu průsečíku os v závislosti na typu trojúhelníka.

Sestrojte kružnici k se středem v bodě O procházející vrcholem A . Modifikujte trojúhelník přemísťováním vrcholů po nákrese a přesvědčte se, že kružnice k vždy prochází všemi třemi vrcholy (D1).

Obdobným způsobem sestrojte kružnici l trojúhelníku vepsanou. Pro konstrukci os úhlů použijte příkaz *Osa úhlu*, jejich průsečík označte P . (Při konstrukci kružnice vepsané je třeba najít přesně její poloměr!)



Obrázek 2. Rozložení ikon v Cabri Géomètre II s klíčem, pomocí něhož je na ně v textu odkazováno.



Obrázek 3. Příklad 1.

Opět trojúhelník modifikujte.

Další otázky pro žáky: Kdy bude bod P totožný s bodem O ? Sestrojte těžnice trojúhelníka ABC a jejich průsečík (těžiště), označte T . V jakém vztahu jsou body O , P , T ?

Sestrojte kružnici q , která prochází body O , P , T , modifikujte vrcholy trojúhelníka a sledujte polohu těchto bodů vzhledem ke kružnici q . Diskutujte případ, kdy všechny tři body splynou.

Příklad 2: Je dán libovolný trojúhelník ABC . Určete jeho obvod a obsah trojúhelníka.

Vytvořte libovolný trojúhelník a pomocí příkazu *Vzdálenost a délka* (D2) změřte jeho strany (klikneme myší na krajní body měřené strany). Jaký je obvod trojúhelníka? Jaký je jeho obsah?

Na první otázku lze najít odpověď dvěma způsoby:

- (1) Užitím stejného příkazu – *Vzdálenost a délka* (D2), ale kliknutím na trojúhelník, dostanete ihned výsledek.
- (2) Volbou příkazu *Výpočty* (D2) se objeví okno s kalkulačkou, kde lze strany sečíst. Kalkulačka se ovládá myší. Délky stran není třeba opisovat, lze je vložit přímo – kliknutím myší na patřičné číslo na kreslicí ploše. Výsledek můžeme opět myší vytáhnout z kalkulačky na obrazovku.

Pro výpočet obsahu užití příkaz *Obsah* (D2). Druhá možnost je užití pro výpočet obsahu kalkulačku – analogicky jako pro výpočet obvodu.

Vyzkoušejte oba způsoby. Žáky nechte nejdříve najít vlastní způsob, potom řešení diskutujte.

Modifikujte trojúhelník a sledujte, jak se budou chovat naměřené a spočítané hodnoty.

V závěru první části (Příklad 3) se seznámíte s jedním velmi užitečným nástrojem Cabri, a sice naučíte se definovat vlastní makrokonstrukce. Obdobně jako obsahuje Cabri konstrukce *Kolmice*, *Osa úhlu* atd., můžete si nadefinovat makro pro libovolnou vlastní konstrukci, kterou opakovaně používáte.

Příklad 3: Vytvořte makrokonstrukci *Těžiště*, tj. přidejte mezi nástroje Cabri novou funkci, která po kliknutí na trojúhelník zobrazí bod, který je jeho těžištěm.

Nejdříve sestrojte libovolný trojúhelník – *Trojúhelník* (B2), potom středy jeho stran – *Střed* (C1) – a spojnice těchto středů s vrcholy trojúhelníka – *Úsečka* (B2). Sestrojte těžiště – *Průsečíky* (B1).

Nyní tuto konstrukci přidáte do nástrojů Cabri. Vstupním objektem konstrukce je trojúhelník, tj. aktivujete ikonu *Vstupní objekty* (C3) a kliknete myší na trojúhelník. Výstupním objektem má být bod, který je těžištěm, tj. aktivujete ikonu *Výstupní objekty* (C3) a kliknete myší na těžiště. Zvolíte *Název, nápověda* (C3), objeví se dialogové okno pro definici nové konstrukce. Do prvního okna napíšete jméno konstrukce, které se bude objevovat na pracovní liště, např. *Těžiště*. Ostatní parametry nejsou povinné. Můžete např. ještě vyplnit okno *Nápověda*, tam zapíšete text, který se bude objevovat v okně s nápovědou, např. *Vyber libovolný trojúhelník*. Potvrdíte OK.

Nyní se po přidržení myši na ikoně C3 objeví roleta, ze které bude možno zvolit konstrukci *Těžiště*.

Sestrojte několik trojúhelníků a vyzkoušejte na nich konstrukci těžiště.

Další otázky pro žáky: Co se stane, když použijete konstrukci *Těžiště* na trojúhelník sestrojený pomocí tří úseček (nikoliv užitím *Trojúhelník*)?

Vytvořte obecnější makro pro těžiště trojúhelníka, tj. makro jehož výstupem bude těžiště trojúhelníka nezávisle na tom, jak byl trojúhelník vytvořen (nápověda: vstupními objekty takového makra musí být tři body – vrcholy trojúhelníka).

Část 2. Nejen analytická geometrie

V příkladech 1 – 3 (uvedených v první části) sloužilo Cabri pouze jako jakési „chytré“ pravítko a kružítko. I když byla prezentována řada výhod spočívajících v modifikaci konstrukcí, odstranění pojmu nepřesnost rýsování atd., ukázali jsme zatím jen malou část všech možností, které Cabri nabízí. V této části bude ukázáno, jak v Cabri pracovat se systémem souřadnic.

Propojení úloh rovinné analytické geometrie se znázorněním odpovídajících geometrických objektů považují za velice důležité. Předcházíme tím tomu, aby žáci „bezduše“ počítali s rovnicemi, aniž by za nimi viděli patřičný geometrický význam. To lze pochopitelně zvládnout i náčrtkem na tabuli, Cabri nám však dává možnost vytvořit rychlé a přesné grafické řešení, které můžeme snadno modifikovat, což v neposlední řadě podněcuje další diskuzi nad úlohami.

S nástrojem *Vzdálenost a délka* (D2) pro měření vzdálenosti či délky jste se seznámili už v první části. Také jste využívali nástroj *Obsah* (D2) pro určení obsahu (viz příklad 2). Pod stejnou ikonou najdete v roletovém menu mimo jiné funkci *Souřadnice a rovnice*, která slouží ke zjištění souřadnic bodu, popřípadě rovnice přímky, kružnice nebo kuželosečky.

Vyzkoušejte: Sestrojte kružnici k se středem S . Doplňte osy pomocí funkce *Zobrazit osy* (E2). Aktivujte ikonu *Souřadnice a rovnice* (D2) a klikněte myší nejdříve na kružnici — zobrazí se rovnice kružnice, potom na bod S — zobrazí se souřadnice bodu S . Uchopte bod S a pohybujte kružnicí. Sledujte souřadnice bodu S a rovnici kružnice. Oba údaje se budou měnit podle aktuální polohy kružnice.

Otevřete si nový soubor, opět zobrazte osy a sestrojte kružnici k se středem S . Nyní zobrazte libovolné další osy pomocí funkce *Nové osy* (E2) – kliknutím zadáte střed souřadného systému a další dva body určující po řadě osu x a osu y . Aktivujte ikonu *Souřadnice a rovnice* (D2) a klikněte myší na kružnici. Na rozdíl od předchozího případu se ihned nezobrazí rovnice kružnice, protože ještě musíte určit, vzhledem ke které soustavě souřadnic se má rovnice vztahovat. To učiníte kliknutím na patřičné osy. Nyní se zobrazí odpovídající rovnice.

Zobrazte také rovnici kružnice vzhledem k druhé soustavě souřadnic. Zobrazte souřadnice bodu S . Opět uchopte bod S a pohybujte kružnicí. Sledujte souřadnice bodu S a rovnice kružnice.

Poznámka: V menu *Nastavit* můžete nastavit v jakém tvaru se budou rovnice zobrazovat. V dialogovém okně menu *Nastavit / Nastavit prostředí* zvolte *Souřadnice a rovnice* a nastavte vaši volbu. Zkuste sami experimentovat také s ostatními možnostmi dialogového okna *Nastavit prostředí*.

Zatím umíte zobrazovat souřadnice existujících bodů a rovnice geometrických objektů. Můžete však i obráceně vytvářet body a objekty dané souřadnicemi a rovnicemi.

Příklad 4: Zobrazte bod $A = [4,31; -2,45]$.

Zobrazte osy a pomocí *Čísla* (E1) kdekoli na nákresně zobrazte čísla 4,31 a $-2,45$. Na osu x naneste vzdálenost 4,31 (aktivujte *Nanést délku* (C1), klikněte na číslo 4,31 a pak na osu x).

Na osu y naneste vzdálenost $-2,45$, přesněji řečeno vzdálenost 2,45 na zápornou poloosu (klikněte myší na číslo $-2,45$ a pak na osu y — nezáleží na tom, na kterou z poloos kliknete). Bodem $[4,31; 0]$ na ose x vedte rovnoběžku s osou y , obdobně bodem $[0; -2,45]$ vedte rovnoběžku s osou x . V průsečíku

rovnoběžek leží hledaný bod. Ikona *Názvy* (E1) umožňuje přidat mu popisku A . Zobraze jeho souřadnice a přesvědčte se, že souhlasí s danými čísly.

Vyplatí se vytvořit si makrokonstrukci, která má za vstupní objekty dvě čísla a jako výstupní objekt bod o souřadnicích odpovídajících dvěma vstupním číslům. Zkuste si tuto makrokonstrukci vytvořit pomocí *Název, nápověda* (C3) – viz příklad 3. Program ohlásí, že zadané vstupní parametry neurčují výstupní parametry – je totiž třeba jako vstupní parametr zadat i souřadnou soustavu klepnutím na osu (pro případ, že bychom měli na nákresně více soustav). Zvolte tedy znovu položku *Vstupní objekty* (C3). Objekty, které jste původně zadali jako vstupní, se na nákresně označí a stále platí, přidáte jen třetí parametr klepnutím na osu. Teď už můžete makrokonstrukci uložit – v roletovém menu pod ikonou (C3) se vaše makrokonstrukce objevila jako nový nástroj. Nyní můžete rychle konstruovat body zadané souřadnicemi – napíšete na nákresnu souřadnice hledaného bodu a užitím právě vytvořené makrokonstrukce vytvoříte bod (nezapomeňte, že vstupním objektem nejsou jen dvě čísla, ale také osy!). Vyzkoušejte.

Příklad 5: Určete průsečíky přímky p , která prochází body $K = [0, 1]$, $L = [3, 4]$, s kružnicí k se středem $S = [1, 0]$ a poloměrem $r = 2$.

Nejdříve nechte žáky úlohu spočítat. K řešení je možno dojít více způsoby. Například lze vyjádřit rovnici kružnice k a obecnou rovnici přímky p :

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4, \quad (1)$$

$$x - y + 1 = 0. \quad (2)$$

Tato soustava dvou rovnic o dvou neznámých má dvě řešení

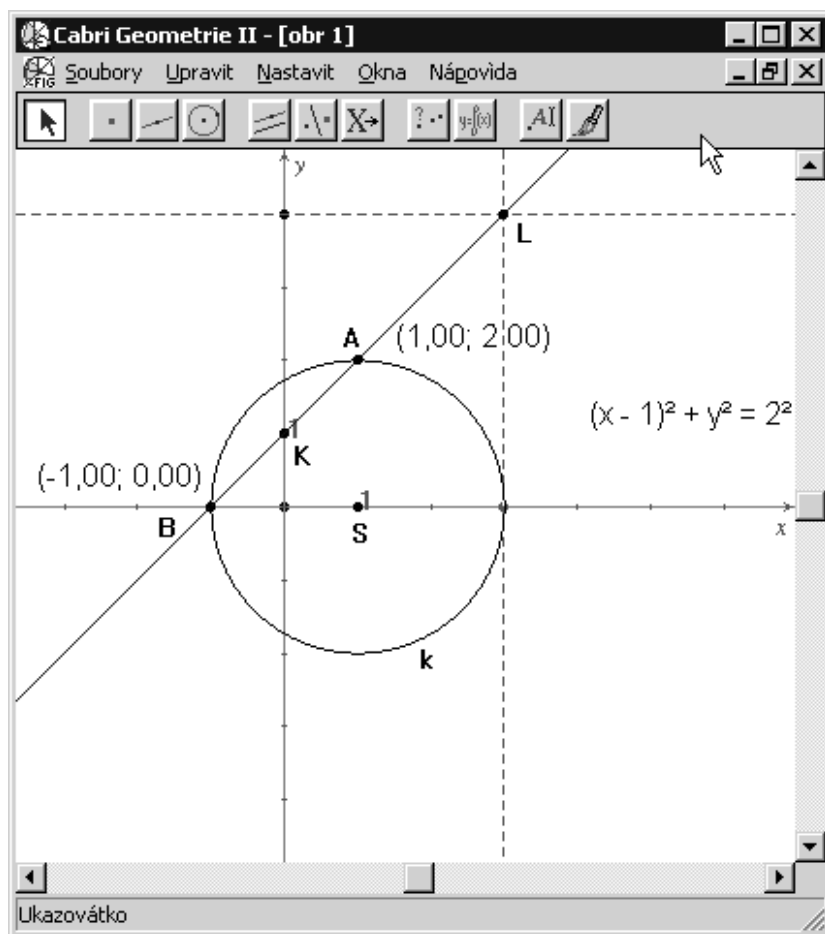
$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1,$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 0,$$

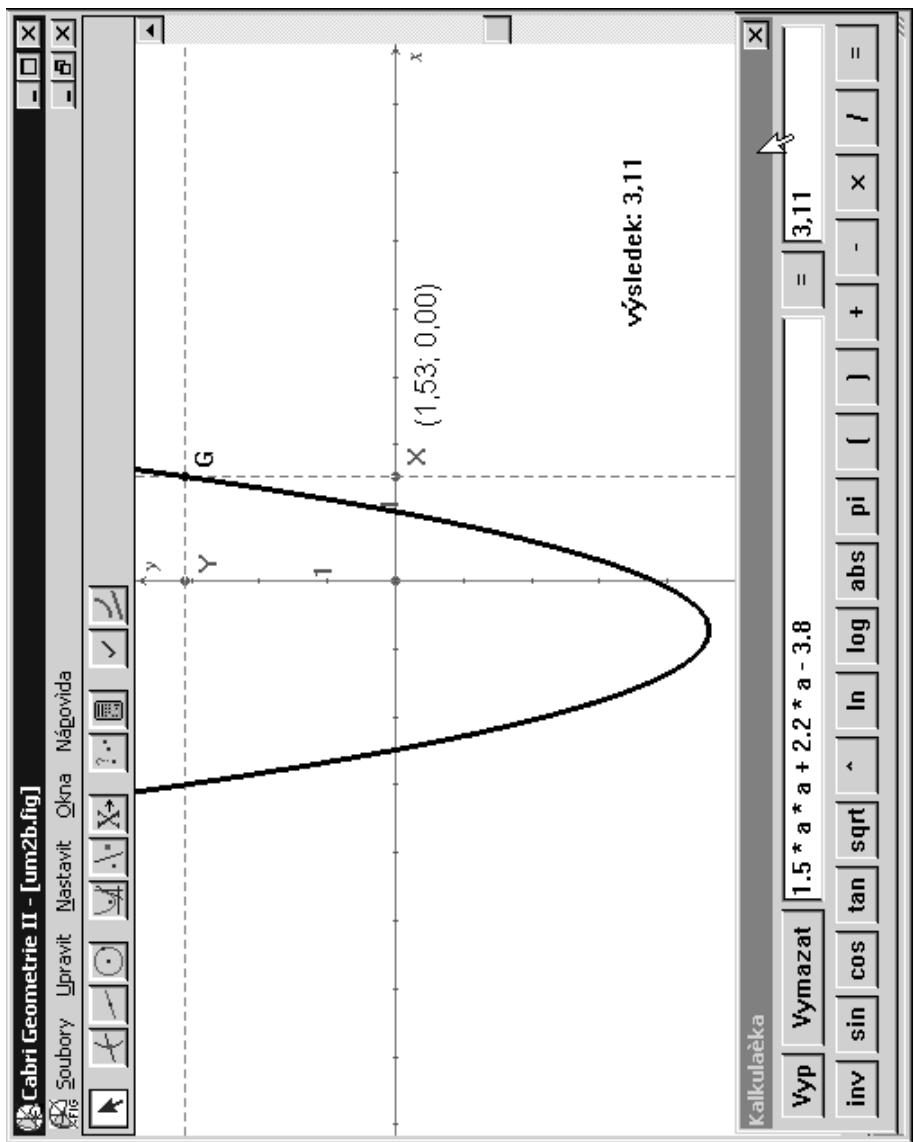
tj. hledané průsečíky kružnice k s přímkou p jsou body $A = [1, 2]$, $B = [-1, 0]$.

Nyní vyřešte úlohu graficky v Cabri. Zobraze osy a sestrojte střed S kružnice k . Střed je třeba sestrojít přesně, tj. například nanesením délky 1 na osu x (viz příklad 4). Sestrojte kružnici k pomocí nástroje *Kružnice* (B3) – poloměr kružnice je opět nutno sestrojít přesně, tj. například nanesením délky 3 na osu x (viz obr. 4). Pro kontrolu si nechte pomocí funkce *Souřadnice a rovnice* (D2) vypsát rovnici kružnice. Obdobně sestrojte body K , L a přímku p (využijte makrokonstrukce z příkladu 4). Aktivujte ikonu *Průsečíky* (B1), klikněte na kružnici k a přímku p , vytvořené průsečíky označte A , B pomocí *Názvy* (E1). Znovu aktivujeme ikonu *Souřadnice a rovnice* (D2) a zjistíte hledané souřadnice průsečíků.

V úloze lze dále pokračovat např. hledáním průsečíků kružnice k' , která je s danou kružnicí k osově souměrná podle osy y atd. Pokud pracujete s pokročilejšími žáky nebo studenty učitelství na VŠ, můžete právě popsané nástroje Cabri využít také k úlohám na transformace souřadnic v rovině.



Obrázek 4. Příklad 5.



Obrázek 5. Příklad 6

Příklad 6: Vykreslete graf funkce $y = f(x)$, kde

$$f(x) = 1,5x^2 + 2,2x - 3,8.$$

Zobrazte osy, na ose x zvolte libovolně bod $X = [x, 0]$ a zobrazte jeho souřadnice. Aktivujte kalkulátor (*Výpočty* (D2) – viz příklad 2). Vypočtete hodnotu funkce pro vámi zvolené x (tj. dosazujte x -ovou souřadnici bodu X za x do výrazu $1,5x^2 + 2,2x - 3,8$ tak, že na ni kliknete myší, druhou mocninu počítejte jako součin). Výsledek vytáhněte na nákresnu (viz obr. 5). Kalkulátor vypněte a výsledek zobrazený na nákresně naneste na osu y – dostanete tak bod $Y = [0, f(x)]$. Pomocí bodů $X = [x, 0]$ a $Y = [0, f(x)]$ sestrojte bod $G = [x, f(x)]$ (viz příklad 4) – to je jeden bod grafu hledané funkce. Nyní nechte bod G vykreslovat stopu – aktivujte ikonu *Stopu ano / ne* (E1) a klikněte na bod G , potom zvolte *Ukazovátka* (A), uchopte myší bod X a sledujte dráhu bodu G .

Graf lze vykreslit i rovnoměrným pohybem pomocí nástroje *Pohyb objektu* (E1). Aktivujte tuto ikonu, přidrže stlačenou myš na bodě X a se stisknutým tlačítkem myši natáhněte malou pružinu, která se u bodu X zobrazí. Jakmile myš pustíte, bod se začne rovnoměrně pohybovat a s ním i všechny objekty zkonstruované „v závislosti na něm“, tj. zejména bod G . Čím delší bude pružina, tím rychlejší bude pohyb bodu. Animaci lze zastavit klávesou Esc.

Graf můžete zobrazit také pomocí nástroje *Množina objektů* (C1). V tomto případě se vykreslí naráz celý obraz paraboly. Klikněte myší nejdříve na bod G (bod vytvářející hledanou množinu bodů) a potom na bod X (bod generující hledanou množinu bodů).

Podrobněji se ikonám *Pohyb objektu* (E1) a *Množina objektů* (C1) budeme věnovat v další části.

Část 3. Množiny geometrických objektů

V části 2 jsme zmínili nástroje, pomocí kterých je možno v Cabri Géomètre efektivně generovat množiny bodů daných vlastností. V této části se těmito nástroji budeme věnovat podrobněji. Ukážeme si, že s jejich pomocí lze generovat nejen množiny bodů, ale i množiny jiných geometrických objektů.

3.1. Množiny bodů daných vlastností

Řadu geometrických objektů lze vytvořit jako množinu bodů určitých vlastností. Asi nejjednodušším případem je kružnice k se středem S a poloměrem r – množina všech bodů v rovině majících od pevného bodu S konstantní vzdálenost r . K vytvoření této množiny bodů standardně používáme v geometrii kružítko. V této části ukážeme, jak pomocí Cabri konstruovat některé složitější množiny bodů.

Příklad 7: Je dána kružnice k se středem S a vně této kružnice bod B . Sestrojte množinu všech středů O úseček AB , jejichž krajní bod A leží na kružnici k .

Nechte nejdříve studenty udělat náčrtek na papír a odhadnout, co bude tvořit množina všech středů úseček AB . Potom teprve použijte Cabri.

Pomocí ikony *Kružnice B3* sestrojte kružnici k se středem S a vně této kružnice bod B . Aktivujte ikonu *Úsečka B2* a sestrojte úsečku AB s krajním bodem A na kružnici k a krajním bodem B v daném bodě B . Zvolte nástroj *Střed úsečky C1* a klikněte myší na úsečku AB . Střed úsečky označte O . Vygenerujte množinu všech takových středů O : zvolte *Množina objektů C1*, klikněte nejdříve na bod O , potom na bod A . pokud jste postupovali správně, vytvořila se kružnice procházející bodem O . Označte ji m . Nyní můžete pohybovat bodem B po kreslící ploše, popř. měnit poloměr kružnice k a sledovat, jak se bude měnit vygenerovaná množina bodů.

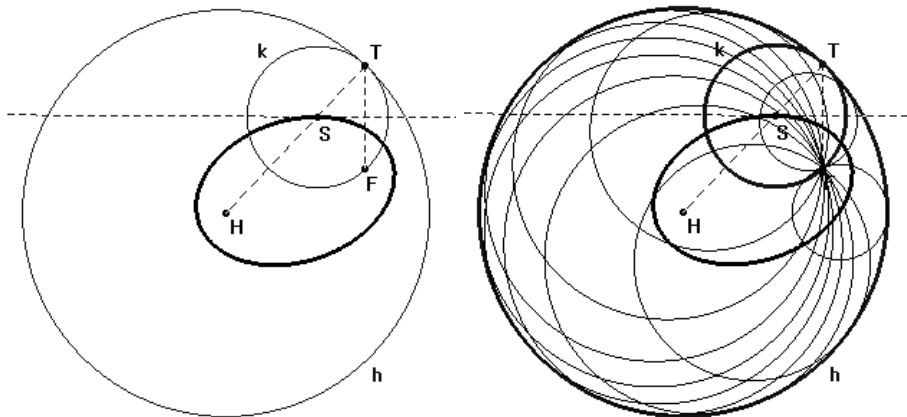
Vykreslování všech středů úseček AB lze provést také postupně. Smažte vygenerovanou kružnici m . Aktivujte ikonu *Stopa ano/ne E1* a klikněte myší na bod O . Zvolte *Pohyb objektu E1*, stiskněte myš u bodu A a se stlačenou myší natáhněte u bodu A malou pružinu (viz příklad 6). Pohyb lze zastavit klávesou **Esc**. (Poznámka: Na rozdíl množiny bodů vykreslené pomocí ikony *Množina objektů C1* se takto vykreslená množina bodů nezachová při uložení a opětovném otevření souboru ani při pohybech s kreslící plochou apod.)

Příklad 8: Je dána kružnice h se středem H a uvnitř této kružnice bod F ($F \neq H$). Sestrojte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice h a procházejí bodem F .

Sestrojte kružnici h se středem H a uvnitř této kružnice bod F . Sestrojte střed jedné kružnici k , která prochází bodem F a dotýká se kružnice h v libovolném bodě T . Zvolte bod T na kružnici h . Střed S hledané kružnice k bude ležet na úsečce HT a na ose úsečky FT . Aktivujte ikonu *Úsečka B2* a sestrojte úsečky HT , FT . Zvolte nástroj *Střed úsečky C1* a klikněte myší na úsečku FT . Sestrojte průsečík osy úsečky FT s úsečkou HT (např. pomocí ikony *Průsečíky B1*) a označte ho S . Sestrojte kružnici k se středem S a poloměrem ST . Vygenerujte množinu všech takových středů S : zvolte *Množina objektů C1*, klikněte nejdříve na bod S , potom na bod T . Pokud jste postupovali správně, byla vytvořena elipsa s ohnisky v bodech H a F (viz obrázek 6). Pomocí nástroje *Množina objektů C1* lze do obrázku dokreslit také množinu kružnic k — nejdříve klikněte myší na kružnici, potom na bod T (viz obrázek 7). Obdobně jako v předchozím příkladě lze vykreslování všech středů S i kružnic k provést také postupně.

Zadání úlohy lze pozměnit tak, že místo bodu F bude dána kružnice f ležící uvnitř kružnice h a budete hledat množinu všech středů kružnic k dotýkajících se kružnic h a f .

Poznámka: Počet objektů, které se vykreslí při použití nástroje *Množina objektů*, můžete nastavit. V dialogovém okně *Nastavit / Nastavit prostředí* zvolte *Množiny* a nastavte vaši volbu.



Obrázek 6.

Obrázek 7.

3.2. Obálky rovinných křivek

Budeme uvažovat jedno parametrickou soustavu křivek v rovině a studovat její obálku. Předpokládejme, že každá křivka v rovině je pro daný parametr $t \in \mathbb{R}$ zadána rovnicí

$$F(x, y, t) = 0, \quad (3)$$

kde každá funkce $F(x, y, t)$ je definovaná pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a $t \in \mathbb{R}$ a je třídy C^r pro dostatečně velké r (tj. existuje první až r -tá derivace, kde r je dostatečně velké). Křivku \mathcal{K} , která se dotýká všech křivek soustavy (3), nazýváme *obálkou soustavy křivek* (3).

Např. kružnice h na obrázku 7 je obálkou všech kružnic k , které mají střed na elipse. Zformulujme nyní definici precizněji:

Křivku \mathcal{K} s parametrickým vyjádřením $f(t)$, nazýváme obálkou soustavy křivek (3), jestliže má v bodě $f(t_0)$ styk 1. řádu s křivkou $F(x, y, t_0)$ pro všechna $t_0 \in I$.

To znamená, že pokud vyloučením parametru t ze soustavy

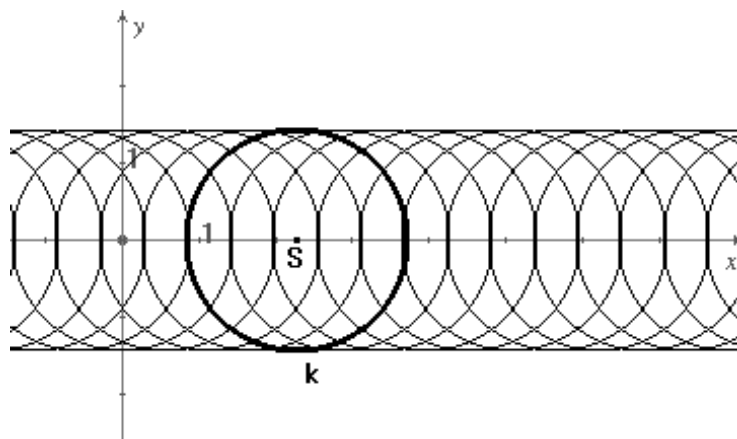
$$F(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \quad (4)$$

obdržíme rovnici

$$G(x, y) = 0, \quad (5)$$

která je implicitním vyjádřením nějaké křivky \mathcal{K} , pak je tato křivka hledanou obálkou.²

²Podrobnější teoretický výklad k pojmu *obálka soustavy křivek* viz např. Doupovec, Miroslav, *Diferenciální geometrie a tenzorový počet*, Brno : PC-DIR Real, 1999 (skriptum VUT Brno).



Obrázek 8.

Vyzkoušejte: Zobrazte osy – *Zobrazit osy* (E2). Aktivujte ikonu *Kružnice* B3 a sestrojte kružnici k se středem S na ose x a libovolným poloměrem r . Nyní vygenerujte množinu všech takových kružnic o poloměru r , které mají střed na ose x . Zvolte nástroj *Množina objektů* C1, klikněte myší nejdříve na kružnici a potom na její střed.

Snadno vypočteme obálku soustavy kružnic konstantního poloměru r , které mají střed na ose x . Vyjádříme soustavu (3). Všechny kružnice se středem na ose x , tj. $S = [t, 0]$, a poloměrem r budou vyjádřeny soustavou rovnic

$$(x - t)^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (6)$$

Určíme $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$, tj. derivací (6) podle t obdržíme

$$2(x - t) = 0. \quad (7)$$

Z rovnic (6), (7) snadno vyloučíme parametr t a dostáváme dvě přímky

$$y = \pm r.$$

Nyní tuto obálku vytvoříme pomocí nástrojů Cabri. Zobrazte osy – *Zobrazit osy* (E2). Aktivujte ikonu *Kružnice* B3 a sestrojte kružnici k se středem S na ose x (nikoliv ovšem v počátku!) a libovolným poloměrem r . Nyní vygenerujte množinu všech takových kružnic o poloměru r , které mají střed na ose x . Zvolte nástroj *Množina objektů* C1, klikněte myší nejdříve na kružnici a potom na její střed (viz obrázek 8). (Častá chyba: Pokud jste při zadávání poloměru r kružnice k zvolili jako koncový bod poloměru ten bod kružnice, který leží na ose x , bude vygenerována jiná množina kružnic, než je požadováno v zadání. Jaká?)

Poznámka: Z rovnic (4) ale nelze eliminovat parametr t ve všech případech. Např. rovnice $x^2 + y^2 - t = 0$, kde $t > 0$, představují jedno parametrickou

soustavu soustředných kružnic, které evidentně nemají obálku. Skutečně také příslušná soustava (4) nemá řešení.

Příklad 9: Je dána kružnice h se středem $H = [0, 0]$ a poloměrem s . Určete obálku soustavy všech kružnic k , které mají střed S na kružnici h a konstantní poloměr $r < s$.

Zobrazte kružnici h se středem $H = [0, 0]$ a poloměrem s . Sestrojte jednu kružnici k se středem S a poloměrem r . Nyní vygenerujte množinu všech takových kružnic o poloměru r , které mají střed na ose x . Zvolte nástroj *Množina objektů* C1, klikněte myší nejdříve na kružnici a potom na její střed. (viz obrázek 9)

Ve výsledném obrázku měňte poloměr kružnice k a sledujte obálku.

Obálku kružnic k můžete také vyjádřit rovnicemi. Ukážeme jeden z možných postupů řešení.

Snadno lze vyjádřit soustavu (3). Nechť má kružnice h parametrické vyjádření

$$x = s \cos t, \quad y = s \sin t.$$

Potom všechny kružnice se středem na kružnici h a poloměrem r budou vyjádřeny soustavou rovnic

$$(x - s \cos t)^2 + (y - s \sin t)^2 - r^2 = 0, \quad (8)$$

což lze upravit na tvar

$$x^2 + y^2 - 2s(x \cos t + y \sin t)^2 + s^2 - r^2 = 0. \quad (9)$$

Derivací (9) podle t dostaneme

$$2s(x \sin t - y \cos t) = 0. \quad (10)$$

Úpravou a umocněním rovnic (9), (10) obdržíme soustavu

$$\frac{(x^2 + y^2 + s^2 - r^2)^2}{4s^2} = (x \cos t + y \sin t)^2, \quad (11)$$

$$0 = (x \sin t - y \cos t)^2. \quad (12)$$

Po umocnění levých stran a sečtení rovnic (11), (12) vyloučíme parametr t a dostáváme

$$(x^2 + y^2 + s^2 - r^2)^2 = 4s^2(x^2 + y^2). \quad (13)$$

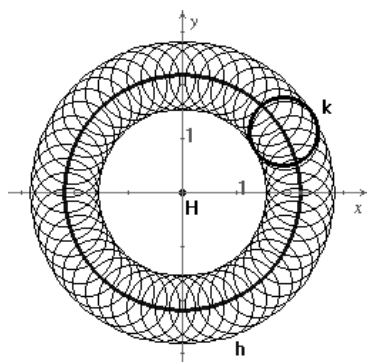
Zavedením substituce $x^2 + y^2 = z$ převedeme (13) na kvadratickou rovnici

$$z^2 - 2(s^2 + r^2)z + (s^2 - r^2)^2 = 0.$$

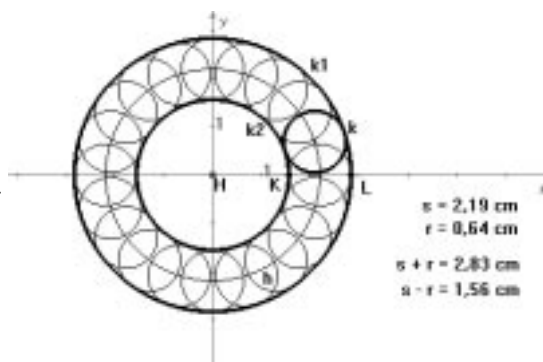
Její řešení obdržíme $z_{1,2} = s^2 + r^2 \pm 2rs$.

Po dosazení $z_{1,2} = x^2 + y^2$ je zřejmé, že se jedná o rovnice dvou kružnic z obrázku 10

$$k_1 : x^2 + y^2 = (s + r)^2, \quad k_2 : x^2 + y^2 = (s - r)^2.$$



Obrázek 9.



Obrázek 10.

Poznámka: Na obrázku 10 byl před vygenerováním kružnic nastaven počet objektů v dialogovém okně *Nastavit / Nastavit prostředí / Množiny* z původních padesáti na dvacet (viz poznámka za příkladem 8). Kružnice k_1, k_2 tvořící obálku byly sestrojeny pomocí nástrojů *Vzdálenost a délka D2, Výpočty D2* (výpočet poloměrů $s + r, s - r$), *Nanést délku a délku C1* a *Kružnice B3*.

Příklad 10: Je dána kružnice h se středem $H = [0, 0]$ a poloměrem s . Určete obálku soustavy kružnic k , které mají střed S na kružnici h a procházejí bodem $O = [s, 0]$.

Zobrazte osy a kružnici h se středem $H = [0, 0]$ a poloměrem s . Aktivujte ikonu *Průsečíky B1* a sestrojte průsečíky kružnice h s osou x . Pomocí nástroje *Názvy E1* označte průsečík o souřadnicích $[s, 0]$ jako bod O . Sestrojte jednu kružnici k se středem S na kružnici h procházející bodem O . Obdobně jako v předešlém příkladě nyní pomocí nástroje *Množina objektů C1* vygenerujte množinu všech takových kružnic k (viz obrázek 11). Srovnej s předešlým příkladem.

Na rozdíl od příkladu 9 jsou kružnice k „uvázány“ do pevného bodu O , tj. poloměr r kružnice k se mění v závislosti na pohybu jejího středu. Analogicky jako v předchozím příkladě uvažujme parametrické vyjádření kružnice h ve tvaru.

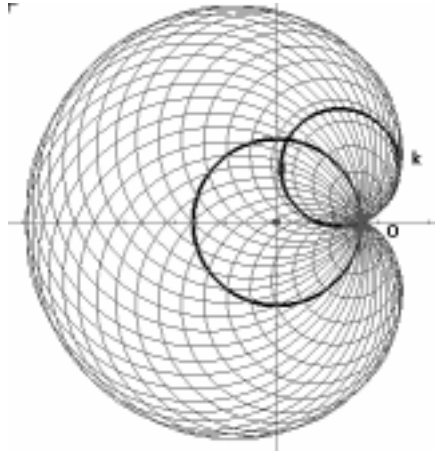
$$x = s \cos t, \quad y = s \sin t .$$

Potom pomocí kosinovy věty pro trojúhelník HOS vyjádříme poloměr r jako funkci t

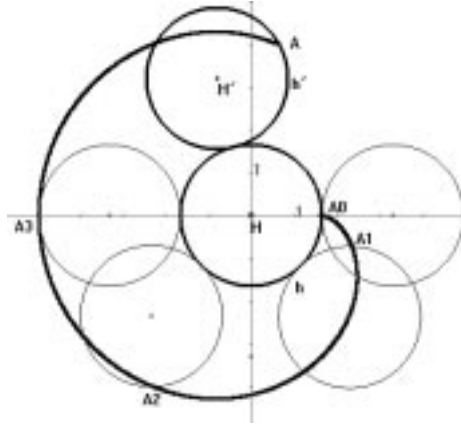
$$r^2 = 2s^2(1 - \cos t)$$

a všechny kružnice se středem na kružnici h procházející bodem O budou vyjádřeny soustavou rovnic

$$(x - s \cos t)^2 + (y - s \sin t)^2 - r^2 = 2s^2(1 - \cos t) = 0. \quad (14)$$



Obrázek 11.



Obrázek 12.

Obdobným postupem jako v příkladě 9 lze obdržet rovnici

$$(x^2 + y^2 - s^2)^2 - 4s^2[(x - s)^2 + y^2] = 0. \quad (15)$$

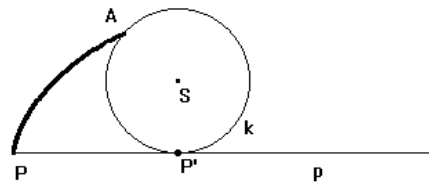
Křivka \mathcal{K} o rovnici (15), která byla vytvořena jako obálka kružnic k se nazývá *kardioida*. Kardioida patří mezi tzv. cyklické křivky, speciálně epicykloidy. Epicykloidy jsou křivky, které opisuje bod pevně spjatý s kružnicí, která se kotálí po vnějším obvodu jiné kružnice. Aby vznikla speciálně kardioida, musí mít obě kružnice – pevná i kotálující se – stejný poloměr (viz obrázek 12). Cyklickým křivkám se budeme věnovat v části 4.

Část 4. Cyklické křivky

4.1. Cykloidy

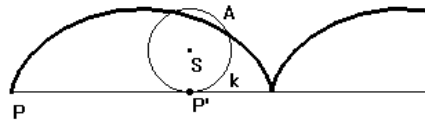
Uvažujme v dané rovině kružnici k a bod A , který je s kružnicí k pevně spojen. Jestliže se kružnice k (tzv. hybná polodie) kotálí po přímce (tzv. pevná polodie), vytváří bod A křivku, kterou nazýváme

- cykloida – leží-li bod A na kružnici,
- zkrácená cykloida – leží-li bod A uvnitř kružnice,
- prodloužená cykloida – leží-li bod A vně kružnice.



delka oblouku $AP' = |PP'| = 3,15$ cm

Obrázek 13.



delka oblouku $AP' = |PP'| = 3,41$ cm

Obrázek 14.

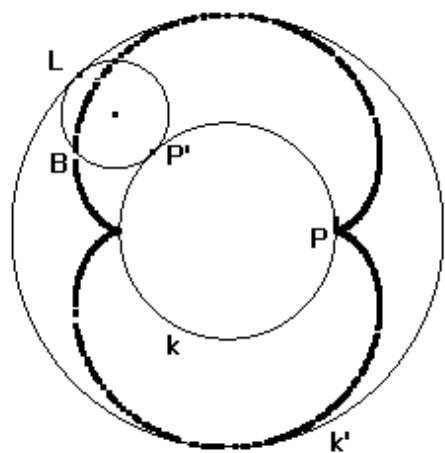
Příklad 11: Je dána polopřímka p s počátkem P a kružnice k se středem S , která se dotýká polopřímky p v bodě P . Sestrojte množinu bodů, kterou vytvoří bod $A \in k$, jestliže se kružnice k kotálí po polopřímce p . (Uvažujte výchozí polohu bodu A jako $A = P$.)

Nechte nejdříve studenty udělat náčrtek na papír a odhadnout, jak bude hledaná množina bodů vypadat. Situaci lze studentům přiblížit představou kola jedoucího po silnici a bodu na jeho plášti (viz. UM ročník 10, č.2, str. 75, obrázek 1). Teprve potom použijte Cabri.

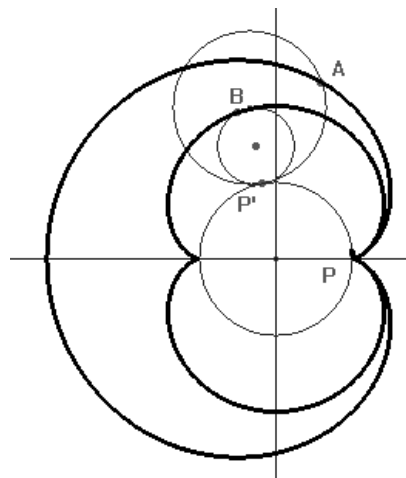
Sestrojte polopřímku p s počátkem P . Uvažujte, kružnici k odkotálenou do bodu P' (viz obr. 13), tj. sestrojte kružnici k se středem S , která se dotýká polopřímky p v bodě $P' \neq P$. (Sestrojte bod $P' \in p$. Zvolte *Kolmice C1*, klikněte na bod P' a na polopřímku p . Pomocí ikony *Kružnice B3* sestrojte kružnici k se středem S na kolmici, poloměr určete kliknutím na P' .) Uchopte bod P' a pohybujte jím po polopřímce p , bude se pohybovat celá kružnice k . Výchozí poloha kružnice je $P = P' = A$. Jestliže při kotálení kružnice po polopřímce p přejde bod P do bodu P' , pak pro bod A platí: délka úsečky PP' je rovna délce oblouku AP' . Sestrojte takový bod A . (Zvolte ikonu *Vzdálenost a délka D2* a kliknutím na krajní body určete délku úsečky PP' . Nyní zvolte *Nanést délku C1*, klikněte na číslo udávající délku úsečky PP' , potom na kružnici k a na bod P' . Odpovídající délka se nanesla na kružnici „proti směru hodinových ručiček“. Hledaný bod A je souměrně sdružený s tímto bodem podle osy SP' , tj. zvolte *Osová souměrnost C2* a sestrojte bod A .)

Uchopte znovu bod P' a pohybujte jím po polopřímce p . Kružnice k se kotálí po polopřímce a bod A opisuje hledanou množinu bodů — **cykloidu**. K postupnému vykreslování cykloidy na obrazovku použijte *Stopa ano/ne E1* (klikněte myší na bod A) a pohybujte bodem P' , popř. aktivujte ikonu *Pohyb objektu E1* a natáhněte u bodu P' pružinku (Podrobný popis těchto nástrojů viz Příklad 7, UM ročník 10, č. 4). Cykloidu lze také vykreslit užitím nástroje *Množina objektů C1*.

Tvar cykloidy závisí na poloměru kružnice k . Uchopte kružnici k a změňte její poloměr. Sledujte změnu cykloidy — viz obrázek 14.



Obrázek 16.



Obrázek 17.

pohybovat bod L při kotálení kružnice l . Dále sestrojte kružnici l se středem L a poloměrem $r' = \frac{1}{2}r$, která se dotýká kružnice k v bodě $P' \neq P$.

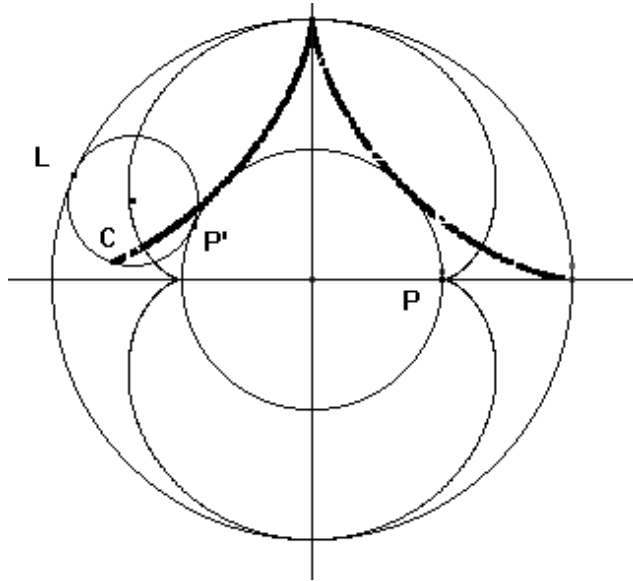
Uchopte bod L a pohybujte jím po kružnici k' , bude se pohybovat celá kružnice l . Výchozí poloha kružnice l je $P = P' = B$. Jestliže při kotálení kružnice l po kružnici k přejde bod P do bodu P' , pak pro bod B platí: délka oblouku PP' je rovna délce oblouku BP' . Sestrojte takový bod B . (Nejdříve je třeba určit délku oblouku PP' . Pomocí ikony *Oblouk B3* označte oblouk PP' .³ Zvolte ikonu *Vzdálenost a délka D2* a kliknutím na oblouk PP' určete jeho délku. Nyní zvolte *Nanést délku C1* a analogicky jako v příkladě 11 naneste odpovídající délku na kružnici l .)

Uchopte znovu bod L a pohybujte jím po kružnici k' . Kružnice l se kotálí po kružnici k a bod B opisuje hledanou množinu bodů — **epicykloidu** (viz obrázek 16). K postupnému vykreslování epicykloidy na obrazovku použijte *Stopano/ne E1* (klikněte myší na bod B) a pohybujte bodem L , popř. aktivujte ikonu *Pohyb objektu E1*).

Tvar epicykloidy závisí na poloměrech pevné a hybné polodie. Sestrojte nyní (např. do stejného obrázku) epicykloidu, kterou vytvoří bod A ležící na kružnici l' kotálející se po kružnici k . Kružnice l' má poloměr $q = r$. Postupujte analogicky jako v předchozím případě.

Výsledná křivka (viz obrázek 17) se nazývá **kardioida**, tj. kardioida je speciálním typem epicykloidy — opisuje ji bod pevně spjatý s kružnicí, která se kotálí po vnějším obvodu jiné kružnice, přičemž musí mít obě kružnice – pevná i kotálející se – stejný poloměr.

³Prostřední bod určující oblouk volte co možná nejbližší k bodu P .



Obrázek 18.

4.3. Hypocykloidy

Uvažujme v dané rovině kružnici l a bod A , který je s kružnicí k pevně spojen. Jestliže se kružnice k (tzv. hybná polodie) kotálí po vnitřním obvodu jiné kružnice (tzv. pevná polodie), vytváří bod A křivku, kterou nazýváme **hypocykloida**. Obdobně jako u cykloidy a epicykloidy lze dále rozlišovat zkrácenou a prodlouženou hypocykloidu podle polohy bodu A vzhledem ke kružnici l (leží-li bod A vně kružnice l , vykreslí se při kotálení kružnice l tzv. prodloužená hypocykloida, pokud bude bod A ležet uvnitř kružnice, vykreslí se tzv. zkrácená hypocykloida).

Vyzkoušejte:

Sestrojte hypocykloidu. Postupujte analogicky jako při konstrukci epicykloidy (viz obrázek 18).

4.4. Historická poznámka

Existují domněnky, že cykloida byla známá už ve starověku, ale s jistotou se to nepodařilo ověřit. V knize G. Loria [5] je udáno, že první zmínku o cykloidě lze najít v knize, kterou vydal Ch. de Bouvelles v roce 1501 v Paříži. Teprve v roce 1599 se k cykloidě vrací G. Galilei. Velké pozornosti se pak cykloidě a od ní ovozeným křivkám dostalo v 17. století, kdy se jimi zabývali M. Mersenne, G. de Roberval, bratři Bernouliové a další.

Mgr. Lenka Lomtatidze
Katedra matematiky PřF MU
Janáčkovo nám. 2a, 662 95 Brno
e-mail: mlc@math.muni.cz

Reference

- [1] Čechová, L.: *Kam se nám zaběhla deskriptivní geometrie*, Učitel matematiky, ročník 8, č. 3, 2000
- [2] Vaníček, J.: *Metodika použití dynamické geometrie při SŠ a ZŠ*
<http://www.pf.jcu.cz/cabri/>
- [3] Čechová, L.: *Software pro výuku geometrie*
<http://www.math.muni.cz/~mlc/geom/>
- [4] Ed. Fuchs E., Bečvář J.: *Matematika v 16. a 17. století*, Praha 1999 (Dějiny matematiky, svazek 12).
- [5] Loria, G.: *Spezielle algebraische und transcendente ebene Curven*, I. a II. díl, 2. vydání, Leipzig und Berlin 1910.