
Rotační setrvačnost v geometrii

JAROMÍR ŠIMŠA

Abstrakt. Článek je podrobným výkladem tématu, ve kterém se pojí základy dvou disciplin: eukleidovské geometrie a newtonovské mechaniky. Způsobem zpracování je příspěvek úplným podkladem pro demonstraci mezipředmětové kooperace při výuce matematiky a fyziky na čtyřletých gymnáziích.

1. Úvod

V článku [10] jste se mohli dočíst o tom, jaké geometrické výsledky plynou z fyzikálních představ o těžištích hmotných soustav. Nyní ve stejném duchu posoudíme vlastnost, které říkáme *setrvačnost rotačního pohybu* těles. První „naivní“ představy o této vlastnosti získáváme v útlém dětství (roztáčení a brzdění kolotoče, hračky zvané jojo a káča, setrvačníky autíček apod.). Teprve při výuce fyziky na střední škole se tento „projev“ otáčených těles naučíme kvantitativně popisovat veličinou zvanou *moment setrvačnosti*. Připomeneme si to za okamžik; zároveň uvedeme nejdůležitější pravidlo o této veličině, tzv. *Steinerovu¹ větu*. Poté se na moment setrvačnosti podíváme matematicky jako na číselnou funkci, definovanou na eukleidovském prostoru, ve kterém je rozmístěn konečný počet hmotných bodů. Tak budeme připraveni k tomu, abychom tuto funkci a její vlastnosti uplatnili na několik příkladů z elementární geometrie. Vyřešíme tyto příklady způsobem velice efektivním a přitom odlišným od běžných geometrických výpočtů (založených na podobnosti, kosinové větě či metodě souřadnic). Patrně s překvapením zjistíme, že Steinerova věta o momentu setrvačnosti stojí v pozadí mnohých známých geometrických tvrzení. Získáme tak nový, netradiční pohled na tato tvrzení a znovu se přesvědčíme, jak eukleidovská geometrie úzce souvisí s newtonovskou fyzikou.

¹ Jacob Steiner, 1796–1863, švýcarský matematik, profesor Berlínské univerzity. Jeden z tvůrců projektivní geometrie.

2. Setrvačnost v klasické dynamice

Vlastnost hmoty, které říkáme setrvačnost, stručně vyjadřujeme takto: *Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu do té doby, dokud na něj nezačne působit nějaká síla.* Toto tvrzení v sobě skrývá mnoho předpokladů a zjednodušení, mimo jiné to, že zanedbáváme rozměry zkoumaného tělesa, když je považujeme za *hmotný bod*. Jeho pohyb se řídí Newtonovým zákonem

$$\mathbf{F}(t) = m \cdot \mathbf{a}(t) = m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = m \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t), \quad (1)$$

zapsaným v obvyklém označení (\mathbf{F} je vektor působící síly, m hmotnost zkoumaného bodu, \mathbf{a} jeho zrychlení, \mathbf{v} jeho rychlost, $\mathbf{r} = \mathbf{PA}$ polohový vektor, kde bod P je místo našeho pozorování a A je bod, jehož pohyb sledujeme) s vyznačením závislosti na čase t .

I když je pohyb tělesa tvořeného velkým počtem hmotných bodů složitý, můžeme s tělesem spojit myšlený bod zvaný *těžiště*, jehož pohyb se opět řídí zákonem (1). V něm pak \mathbf{F} značí výslednici všech vnějších sil, které na těleso působí. Jsou-li m_i hmotnosti jednotlivých částic (bodů) tělesa a \mathbf{r}_i jim příslušné polohové vektory, je poloha těžiště určena vektorem \mathbf{r} podle vzorce

$$\mathbf{r} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad \text{kde} \quad m = \sum_i m_i.$$

Ze zákona (1) pro pohyb těžiště plyne, že celková hmotnost m je *mírou setrvačnosti* pohybujícího se tělesa. Řečeno jazykem básníka, jenž přisuzuje předmětům vlastnosti živých bytostí, *těleso se brání* změnám rychlosti úměrně tomu, jak velkou má hmotnost.

Jiný druh setrvačnosti pozorujeme u těles, která se otáčejí kolem pevné osy. Celý průběh takového pohybu je popsán funkcí $\varphi = \varphi(t)$, kde $\varphi(t)$ značí velikost orientovaného úhlu, který opsaly částice otáčeného tělesa kol osy otáčení od počátku sledování pohybu do časového okamžiku t (tento úhel je pro všechny částice *pevného* tělesa stejný). Analogii pohybového zákona (1) je v tomto případě diferenciální rovnice

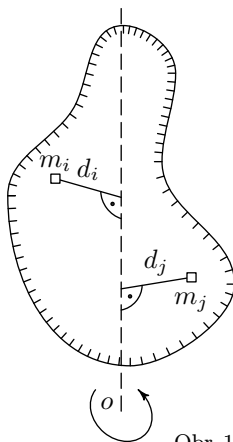
$$M(t) = J \cdot \varepsilon(t) = J \cdot \frac{d\omega}{dt}(t) = J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t). \quad (2)$$

V ní ε značí úhlové zrychlení a ω úhlovou rychlost otáčeného tělesa. Písmenem M je označen součet všech momentů M_k působících sil \mathbf{F}_k

(moment M_k síly \mathbf{F}_k je nenulový skalár, jen když je přímka p_k síly \mathbf{F}_k mimoběžná s osou otáčení; jeho velikost a znaménko tady popisovat nebudeme). Konečně koeficient úměrnosti J v rovnici (2) je veličina, která je ústředním tématem našeho článku: jde o *moment setrvačnosti daného tělesa vzhledem k dané ose*. (Někteří fyzikové pokládají ustálený název „moment setrvačnosti“ za nepřilíš vydařený, raději by mluvili o „rotační setrvačnosti“.) Tuto veličinu zavedl v 18. století L. Euler² při svých výpočtech spojených se zkoumáním otáčivých pohybů těles. Uvědomil si, že hodnota momentu setrvačnosti J je dána vzorcem

$$J = \sum m_i d_i^2, \quad (3)$$

kde m_i jsou hmotnosti jednotlivých částic tělesa a d_i jejich vzdálenosti od osy otáčení (obr. 1). Často se proto v učebnicích fyziky uvádí, že



Obr. 1

moment setrvačnosti závisí nejen na celkové hmotnosti tělesa, ale i na geometrickém rozložení jeho hmoty vzhledem k ose. Tak se zdůrazňuje rozdíl mezi koeficienty úměrnosti m a J v obou zákonech (1) a (2); přitom se však obvykle zamlčuje skutečnost, že zákon (1) *nepopisuje pohyb celého tělesa*, ale pouze pohyb jeho těžiště, jehož poloha na zmíněném geometrickém rozložení hmoty „byťostně“ závisí.

Ve středoškolských kursech fyziky se zpravidla zákon (2) neuvádí. Moment setrvačnosti se tam objevuje pouze v souvislosti s kinetickou ener-

² Leonhard Euler, 1707–1783, geniální švýcarský matematik, profesor univerzity v Basileji, který později přesídlil do Petrohradu. Jedna z největších postav celé historie matematiky, jež významně přispěla do mnoha matematických oborů.

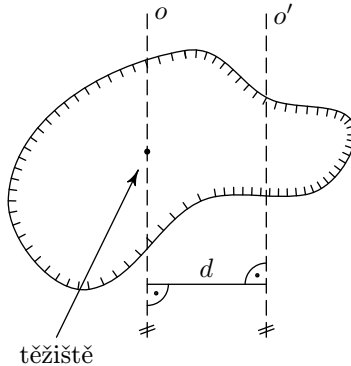
gií E tělesa rotujícího kol pevné osy konstantní úhlovou rychlostí ω :

$$E = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Zaměříme nyní naši pozornost na fakt, že moment setrvačnosti J závisí nejen na tvaru a hmotnosti daného tělesa, ale také na poloze osy otáčení. Při pevně zvoleném tělese tak dostáváme funkci $J = J(o)$, kde o značí zmíněnou osu. Jak hned vysvětlíme, významné jsou ty situace, kdy osa o prochází těžištěm tělesa. Rozdělíme-li totiž všechny možné osy na třídy rovnoběžných přímek, pak v každé třídě je hodnota $J(o)$ nejmenší na právě té ose o , která prochází těžištěm. Je to důsledek krásné (a jak brzy uvidíme, i geometricky významné) Steinerovy věty

$$J(o') = J(o) + md^2, \quad (4)$$

kde o je libovolná osa jdoucí těžištěm T tělesa a o' libovolná další osa, která je s osou o rovnoběžná; přitom d značí vzdálenost těchto rovnoběžek a m hmotnost tělesa (obr. 2).



Obr. 2

Steinerovu větu není obtížné potvrdit exaktním matematickým výpočtem. Lidé s dobrou fyzikální intuicí ji však také dokáží vysvětlit „úvahou“ bez výpočtu, jak je to popsáno v učebnici [4, str. 348].

Tím naše krátká exkurze do světa fyziky končí. Uzavřeme ji poznámkou, že podle vzorce (3) bude možné interpretovat pomocí momentu setrvačnosti ty geometrické situace, ve kterých vystupují součty *druhých mocnin vzdáleností*, obecněji jejich lineární kombinace opatřené „váhovými“ koeficienty. Namísto vzdáleností bodů trojrozměrného prostoru

od přímky (osy) se omezíme na „dvojměrnou“ variantu: půjde nám o součty tvaru

$$\sum m_i \cdot |XA_i|^2 \quad (5)$$

s danými koeficienty m_i , danými body A_i a proměnným bodem X některé roviny. (Takový součet je momentem setrvačnosti (rovinné) soustavy hmotných bodů A_i vzhledem k ose, která prochází bodem X a je ke zmíněné rovině kolmá.) Nejprve však exaktně zavedeme příslušné pojmy a odvodíme jejich potřebné vlastnosti pro případ n -rozměrného eukleidovského prostoru (i když se dále budeme zabývat pouze případem $n = 2$). Jak zjistíme na příkladech, součty (5) nalézají uplatnění i tehdy, kdy jsou některé koeficienty m_i záporné. Budeme proto připouštět, že „hmotnosti“ m_i bodů A_i mohou takové být, aniž bychom rozvíjeli spekulace o fyzikálním významu záporných hmotností.

3. Matematická teorie

V první části tohoto oddílu zopakujeme některé pojmy a poznatky uvedené v článku [10].

Hmotný bod v n -rozměrném eukleidovském prostoru E_n je libovolná uspořádaná dvojice (m, A) , kde m je reálné číslo a A je bod prostoru E_n . Je-li

$$\mathcal{S} = \{(m_1, A_1), (m_2, A_2), \dots, (m_N, A_N)\} \quad (6)$$

libovolná konečná soustava hmotných bodů v E_n , nazveme bod $T \in E_n$ jejím těžištěm, pokud platí vektorová rovnost

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{TA}_i = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Vidíme, že taková definice nezávisí na pořadí, v jakém jsou prvky \mathcal{S} zapsány. Není rovněž nutné, aby body A_i byly různé, což umožňuje hmotné body „štěpit“ nebo naopak „slepovat“. Je rovněž jasné, že definice (7) pro $N = 2$, tedy pro dvojici hmotných bodů A a B ,

$$m_A \cdot \mathbf{TA} + m_B \cdot \mathbf{TB} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

je vektorovým zápisem známého zákona páky.

Z následující věty plyne, že každá soustava (6) sestavená z bodů výlučně *kladných* hmotností má právě jedno těžiště. Taková soustava má totiž nenulovou celkovou (budeme říkat *sumární*) hmotnost m :

$$m = \sum_{i=1}^N m_i \neq 0.$$

3.1. Věta. *Těžiště T soustavy \mathcal{S} vypsané v (6) existuje a je jediné, je-li její sumární hmotnost m různá od nuly. Poloha těžiště T je pak určena rovností*

$$m \cdot \mathbf{PT} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{PA}_i,$$

kde P je libovolně zvolený bod prostoru E_n . (Bod T pochopitelně na volbě bodu P nezávisí.)

DŮKAZ je podán v článku [10].

Připomeňme ještě důležitý princip, podle kterého lze rekurentně určovat těžiště libovolné konečné soustavy hmotných bodů.

3.2. Věta. *Těžiště hmotné soustavy se nezmění, zaměníme-li libovolnou její část (tj. podsoustavu) jedním hmotným bodem, splývajícím s těžištěm této podsoustavy, do něhož soustředíme její sumární hmotnost.*

DŮKAZ najdete opět v článku [10], kde je také ukázáno, že opakovanou aplikací Věty 3.2 lze dokazovat taková geometrická tvrzení jako např. Cérovu větu.

Nyní pro libovolnou soustavu (6) definujeme její *moment setrvačnosti* (vzhledem k bodu X) jako funkci $J: E_n \rightarrow \mathbb{R}$ určenou předpisem

$$J(X) = \sum_{i=1}^N m_i \cdot |XA_i|^2 \quad (\text{pro každý bod } X \in E_n). \quad (9)$$

3.3. Steinerova věta. *Nechť soustava \mathcal{S} vypsaná v (6) má nenulovou sumární hmotnost m a nechť bod T je její těžiště. Pak její moment setrvačnosti (9) lze vyjádřit ve tvaru*

$$J(X) = J(T) + m \cdot |XT|^2 \quad (\text{pro každý bod } X \in E_n). \quad (10)$$

DŮKAZ provedeme prostředky vektorové algebry:

$$\begin{aligned} J(X) &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{XA}_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\mathbf{XT} + \mathbf{TA}_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{XT}^2 + 2\mathbf{XT} \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{TA}_i \right) + \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{TA}_i^2 = \\ &= m \cdot \mathbf{XT}^2 + 2\mathbf{XT} \cdot \mathbf{0} + J(T). \end{aligned}$$

Tím je celý důkaz hotov. Pro zajímavost dodejme, že dokázaný vzorec (10) připomíná známé vyjádření

$$f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) + a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

libovolné kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ se skalární proměnnou x .

Ze Steinerovy věty okamžitě plyne následující

3.4. Důsledek. *Nechť sumární hmotnost m dané soustavy S je různá od nuly. Pak její těžiště T je bodem ostrého globálního extrému jejího momentu setrvačnosti J (v případě $m > 0$ jde o minimum, v případě $m < 0$ o maximum).³ Navíc pro libovolné dva body $X, Y \in E_n$ rovnost $J(X) = J(Y)$ nastane, právě když body X a Y mají od těžiště T stejnou (eukleidovskou) vzdálenost. (Geometricky to znamená, že vrstevnice⁴ momentu setrvačnosti J jsou kružnice v E_2 , kulové plochy v E_3 atd. se společným středem v těžišti T).*

Na závěr naší teoretické části uvedeme jeden hlubší důsledek Steinerovy věty, který patrně jako první objevil C. Jacobi⁵.

3.5. Jacobiův vzorec. *Nechť soustava S vypsaná v (6) má nenulovou sumární hmotnost m a nechť bod T je její těžiště. Hodnota jejího momentu setrvačnosti (9) vzhledem k těžišti T je určena vzorcem*

$$J(T) = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i < k \leq N} m_i m_k \cdot |A_i A_k|^2. \quad (11)$$

DŮKAZ. Pro každé $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ podle Steinerovy věty platí rovnost

$$J(A_k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N m_i \cdot |A_i A_k|^2 = J(T) + m \cdot |T A_k|^2.$$

³ V prvním případě tedy $J(X) > J(T)$, ve druhém $J(X) < J(T)$, a to pro každý bod $X \in E_n$, který je různý od bodu T .

⁴ Množiny bodů z definičního oboru, ve kterých daná funkce nabývá téže hodnoty.

⁵ Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851, německý matematik, profesor univerzity v Königsbergu. Práce z teorie čísel, diferenciálních rovnic, variačního počtu. Zakladatel teorie eliptických funkcí. Známy determinant zvaný *jakobián* se uplatňuje při záměně proměnných v násobných integrálech.

Vynásobíme-li obě strany hodnotou m_k a výsledné rovnosti sečteme přes všechna k , dostaneme

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{1 \leq i < k \leq N} m_i m_k |A_i A_k|^2 &= J(T) \cdot \sum_{k=1}^N m_k + m \cdot \sum_{k=1}^N m_k |T A_k|^2 = \\ &= J(T) \cdot m + m \cdot J(T). \end{aligned}$$

Odtud po dělení číslem $2m$ vychází vzorec (11).

4. Kružnice v méně známé roli

Náš přehled aplikací předchozí teorie zahájíme řešením geometrické rovnice

$$|AX|^2 + |BX|^2 = \lambda^2. \quad (12)$$

V ní jsou A a B dva dané (různé) body v rovině ϱ a λ je daná délka; hledáme všechny body $X \in \varrho$, které rovnici (12) splňují. (Určitě znáte množinu řešení alespoň v případě $\lambda = |AB|$. Její název je připomenut v závěru tohoto odstavce.) Zavedeme proto funkci

$$J(X) = |AX|^2 + |BX|^2 \quad (\text{pro každý bod } X \in \varrho),$$

jež je momentem setrvačnosti dvojice bodů A, B o hmotnostech $m_A = m_B = 1$. Těžištěm této dvojice je střed S úsečky AB . Označme $d = |AB|$. Pak obě úsečky SA, SB mají délku $\frac{1}{2}d$, takže $J(S) = 2 \cdot (\frac{1}{2}d)^2 = \frac{1}{2}d^2$. Podle Steinerovy věty platí pro každý bod $X \in \varrho$ rovnost

$$J(X) = J(S) + (m_A + m_B) \cdot |SX|^2 = \frac{1}{2}d^2 + 2 \cdot |SX|^2.$$

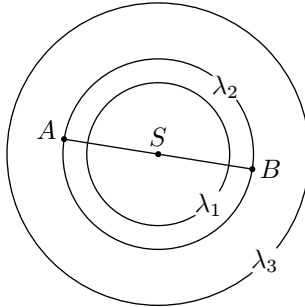
Rovnice (12) je tudíž ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{1}{2}d^2 + 2 \cdot |SX|^2 = \lambda^2, \quad \text{neboli} \quad |SX| = \frac{1}{2}\sqrt{2\lambda^2 - d^2}.$$

Vidíme, že rovnice (12) má řešení, jen když $2\lambda^2 \geq d^2$; pak všechna její řešení X vytvoří kružnici o středu S a poloměru r daném vzorcem

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{2\lambda^2 - d^2}$$

(pro $r = 0$ jde o degenerovanou „kružnici“ tvořenou jediným bodem S ; pro $\lambda = d$ jde o Thaletovu⁶ kružnici nad průměrem AB), viz obr. 3 pro $\lambda = \lambda_i$, kde $\frac{\sqrt{2}}{2}d < \lambda_1 < d$, $\lambda_2 = d$ a $\lambda_3 > d$. Pro srovnání ještě dodejme,



Obr. 3

že rovnice (12) je v [6, str. 101] „řešena“ metodou založenou na kosinové větě, v [5, str. 34] pak metodou souřadnic.

5. Další z rolí kružnice

Při řešení úloh z elementární planimetrie se někdy ptáme, kde leží body roviny, jejichž vzdálenosti od dvou daných bodů A a B této roviny jsou v daném poměru $p > 0$. Tuto otázku vystihuje rovnice

$$|AX| : |BX| = p \quad (13)$$

s neznámým bodem X . Ze základní školy víme, že pro $p = 1$ zaplní řešení rovnice (13) osu úsečky AB . Budeme proto dále předpokládat, že kladné číslo p se nerovná 1. Upravíme-li (13) do tvaru

$$|AX|^2 - p^2 \cdot |BX|^2 = 0, \quad (13')$$

napadne nás „vzít si na pomoc“ dvojici bodů A, B o hmotnostech $m_A = = 1$ a $m_B = -p^2$. Sumární hmotnost $1 - p^2$ je dle předpokladu o čísle p nenulová, takže těžiště T takové dvojice existuje a jeho polohu na přímce AB lze snadno určit pomocí zákona páky (8). (Protože hmotnosti bodů A, B mají opačná znaménka, leží těžiště T vně úsečky AB .) Pro příslušný moment setrvačnosti

$$J(X) = |AX|^2 - p^2 \cdot |BX|^2$$

⁶ Tháles z Milétu, asi 625–545 př.n.l., jeden z prvních řeckých matematiků, astronom, filosof a cestovatel. Dokázal úspěšně předpovědět zatmění Slunce.

můžeme uplatnit Jacobiův vzorec

$$J(T) = \frac{m_A m_B \cdot |AB|^2}{m_A + m_B} = \frac{(-p^2) \cdot |AB|^2}{1 - p^2}$$

a pak využít Steinerovu větu:

$$J(X) = J(T) + (m_A + m_B) \cdot |TX|^2 = \frac{(-p^2) \cdot |AB|^2}{1 - p^2} + (1 - p^2) \cdot |TX|^2.$$

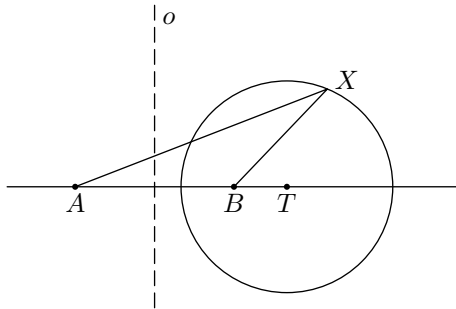
Protože podle (13') hledáme právě ty body X , pro které $J(X) = 0$, dostáváme snadnou úpravou ekvivalentní rovnici

$$|TX|^2 = \frac{p^2 \cdot |AB|^2}{(1 - p^2)^2}.$$

Z ní plyne, že všechny hledané body X zaplní kružnici o středu T a poloměru

$$r = \frac{p \cdot |AB|}{|1 - p^2|} = \frac{|AB|}{|\frac{1}{p} - p|}.$$

(Zlomek jsme nakonec upravili tak, aby bylo dobře vidět, že hodnota poloměru r se nezmění, zaměníme-li poměr p poměrem $1/p$ k němu převráceným; taková záměna odpovídá tomu, že body A a B si v rovnici (13) vymění mezi sebou role, takže každé řešení X přejde do bodu souměrně sdruženého podle osy úsečky AB .) Nalezené množině všech řešení rovnice (13) se říká *Apolloniova⁷ kružnice*, viz [2, str. 11], [5, str. 40], [6, str. 88] nebo [11, str. 20]. Na obr. 4 je naryšována pro $p = 2$.



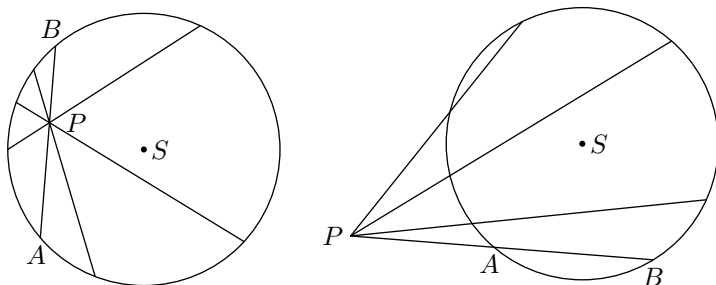
Obr. 4

⁷ Apollonius z Pergy, asi 262–200 př.n.l., řecký matematik, fyzik a astronom. Tvůrce teorie kuželoseček, která je z dnešního hlediska překvapivě úplná.

Z odvozeného vzorce pro poloměr r Apolloniovy kružnice plyne, že $r \rightarrow \infty$ pro $p \rightarrow 1$ a že $r \rightarrow 0$ v případech, kdy $p \rightarrow 0$ nebo $p \rightarrow \infty$. Proto se často říká, že Apolloniova kružnice pro $p \rightarrow 1$ „přechází“ v přímku (jež je osou úsečky AB), zatímco pro $p \rightarrow 0$ (respektive $p \rightarrow \infty$) se „stahuje“ do bodu A (respektive do bodu B).

6. Mocnost bodu ke kružnici

Obráťme nyní naši pozornost na další významnou vlastnost kružnice, která není na první pohled patrná: *Pro všechny tětivy AB dané kružnice $k(S, r)$, které leží na přímkách, jež procházejí daným bodem P , je hodnota součinu délek úseček PA a PB stejná* (obr. 5). Konkrétněji vyjádřeno:



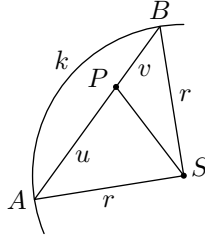
Obr. 5

leží-li zmíněný bod P ve vnitřní (respektive vnější) oblasti kružnice k , platí

$$|PA| \cdot |PB| = r^2 - |PS|^2, \quad \text{respektive} \quad |PA| \cdot |PB| = |PS|^2 - r^2. \quad (14)$$

Jak asi víte, hodnota rozdílu $|PS|^2 - r^2$ se nazývá *mocnost bodu P ke kružnici k* (více se o ní můžete dočíst v [2, str. 14–21] nebo [6, str. 45–64]).

Ukažme, že rovnosti (14) jsou důsledkem Steinerovy věty aplikované na dvojici bodů A a B , jejichž hmotnosti jsou vybrány tak, aby daný bod P byl jejich těžištěm. (Kupodivu jsem tento poznatek nikde v literatuře nenašel.) Nechť např. bod P leží ve vnitřní oblasti kružnice k . Označíme-li $u = |PA|$ a $v = |PB|$ (obr. 6), pak bod P bude podle zákona páky těžištěm dvojice hmotných bodů A a B , právě když $m_A : m_B = v : u$.



Obr. 6

Doplníme-li k tomu „normalizační“ podmínku $m_A + m_B = 1$ (která zjednoduší zápis Steinerovy věty), stane se volba obou hmotností jednoznačná:

$$m_A = \frac{v}{u+v} \quad \text{a} \quad m_B = \frac{u}{u+v}.$$

Příslušný moment setrvačnosti má pak tvar

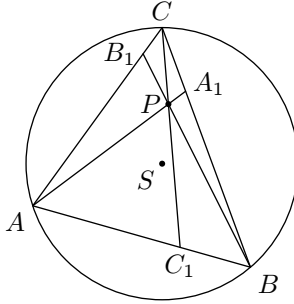
$$J(X) = \frac{v|XA|^2 + u|XB|^2}{u+v},$$

odkud

$$J(P) = \frac{vu^2 + uv^2}{u+v} = uv \quad \text{a} \quad J(S) = \frac{vr^2 + ur^2}{u+v} = r^2.$$

Dosazením $X = S$ do Steinerovy věty $J(X) = J(P) + |XP|^2$ dostaneme okamžitě první rovnost z (14). Postup pro případ, kdy bod P leží ve vnější oblasti kružnice k , je zcela obdobný (jedna z hodnot m_A, m_B však bude kladná, druhá záporná).

Zamyslíme-li se nad předchozím důkazem, zjistíme, že jeho podstatou je fyzikální nápad: *Moment setrvačnosti hmotné kružnice vzhledem k jejímu středu závisí na sumární hmotnosti kružnice, ne však na tom, jak je tato hmota po kružnici rozdělena.* Tvrzení vyjádřené rovnostmi (14) je jen velmi speciálním případem právě zmíněné situace: všechna hmota kružnice je soustředěna do dvou bodů A a B . Matematik samozřejmě neodolá pokušení zjistit, jakou geometrickou poučku vytěžíme ze situace, kdy je hmota kružnice soustředěna do tří bodů, řekněme A, B a C (obr. 7). Jak je vysvětleno v [10], průsečík P příček AA_1, BB_1 a CC_1 trojúhelníku



Obr. 7

ABC je těžištěm trojice bodů A, B, C s jednotkovou sumární hmotností, pokud je tato hmota rozdělena takto:

$$m_A = \frac{|PA_1|}{|AA_1|}, \quad m_B = \frac{|PB_1|}{|BB_1|}, \quad m_C = \frac{|PC_1|}{|CC_1|}. \quad (15)$$

Aplikujeme-li pro příslušný moment setrvačnosti

$$J(X) = m_A \cdot |XA|^2 + m_B \cdot |XB|^2 + m_C \cdot |XC|^2$$

Jacobiův vzorec $J(P) = m_A m_B \cdot |AB|^2 + m_B m_C \cdot |BC|^2 + m_C m_A \cdot |CA|^2$ a Steinerovu větu $J(S) = J(P) + |PS|^2$, dostaneme hledanou „tříbodovou“ analogii „dvoubodového“ pravidla (14):

$$m_A m_B \cdot |AB|^2 + m_B m_C \cdot |BC|^2 + m_C m_A \cdot |CA|^2 = r^2 - |PS|^2, \quad (16)$$

kde koeficienty m_A, m_B a m_C jsou určeny v (15). Zapišme ještě náš „objev“ (16) v jiném tvaru: podle zákona páky platí

$$\frac{m_A}{m_A + m_B} = \frac{|BC_1|}{|AB|} \quad \text{a} \quad \frac{m_B}{m_A + m_B} = \frac{|AC_1|}{|AB|},$$

proto je první sčítanec na levé straně (16) roven

$$(m_A + m_B)^2 |AC_1| \cdot |BC_1| = (1 - m_C)^2 |AC_1| \cdot |BC_1|;$$

podobnou úpravou zbylých dvou sčítanců nakonec obdržíme výsledek

$$(1 - m_A)^2 |BA_1| \cdot |CA_1| + (1 - m_B)^2 |CB_1| \cdot |AB_1| + (1 - m_C)^2 |AC_1| \cdot |BC_1| = r^2 - |PS|^2. \quad (16')$$

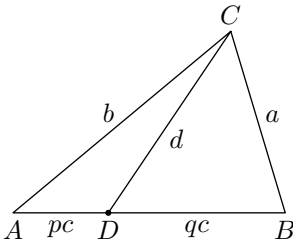
7. Vzorec pro délku příčky trojúhelníku

Odvodíme nyní jisté vyjádření délky úsečky spojující vrchol trojúhelníku s libovolným bodem na protilehlé straně. Jak uvidíme, i v něm se projevuje vlastnost rotační setrvačnosti.

Nejprve běžně označíme

$$a = |BC|, \quad b = |CA|, \quad c = |AB| \quad (17)$$

délky stran libovolného trojúhelníku ABC . Polohu libovolného bodu D na straně AB (obr. 8) popíšeme rovnostmi $|AD| = pc$ a $|BD| = qc$, kde



Obr. 8

p a q jsou nezáporná reálná čísla taková, že $p + q = 1$. (Obráceně každá taková dvojice čísel p, q odpovídá některému bodu D na úsečce AB .) Dokážeme, že délka d úsečky CD je určena zajímavou rovností

$$d^2 = pa^2 + qb^2 - pqc^2, \quad (18)$$

která nese název *Stewartův*⁸ vzorec, viz [6, str. 99–100]. Provedeme to tak, že bodům A a B „nadělíme“ hmotnosti $m_A = q$ a $m_B = p$. Podle zákona páky se tak bod D stane těžištěm dvojice A, B s jednotkovou sumární hmotností, tudíž pro příslušný moment setrvačnosti $J(X) = q|XA|^2 + p|XB|^2$ má Steinerova věta tvar $J(X) = J(D) + |XD|^2$. Dosadíme-li sem $X = C$, pak vzhledem k tomu, že $J(C) = qb^2 + pa^2$ a $|CD| = d$, obdržíme ihned vzorec (18).

Všimněme si, že volbou $p = q = \frac{1}{2}$, kdy se bod D stane středem strany AB , získáme z (18) po odmocnění známý vzorec pro délku těžnice trojúhelníku:

$$t_c = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}}.$$

⁸ Matthew Stewart, 1717–1785, skotský astronom a matematik, profesor univerzity v Edinburghu. Zajímavé geometrické výsledky zveřejňoval většinou bez důkazů.

8. První úkol pro čtenáře

V rovině daného trojúhelníku ABC řešte rovnici

$$|AX|^2 + |BX|^2 = |CX|^2$$

s neznámým bodem X . Proveďte diskusi o počtu řešení X této rovnice vzhledem k délkám $a = |BC|$, $b = |CA|$ a $c = |AB|$.

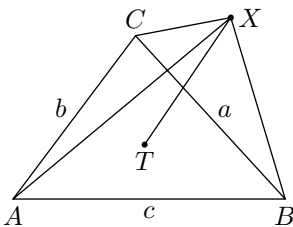
ODPOVĚĎ. Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ASBC$. Rovnice buď nemá řešení (pokud $a^2 + b^2 < c^2$), nebo má právě jedno řešení $X = S$ (je-li $a^2 + b^2 = c^2$), nebo má nekonečně mnoho řešení zaplňujících kružnici o středu S a poloměru $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. (K důkazu využijte trojici bodů A, B, C o hmotnostech $m_A = m_B = 1$ a $m_C = -1$.)

9. Leibnizův vzorec

Takto je pojmenována⁹ rovnost

$$|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \cdot |XT|^2, \quad (19)$$

kteřá ukazuje, jak závisí součet druhých mocnin vzdáleností libovolného bodu X od vrcholů obecného trojúhelníku ABC na délkách a, b, c jeho stran a na vzdálenosti bodu X od jeho těžiště T (obr. 9). Zdůrazněme, že termín „těžiště trojúhelníku“ má zde obvyklý geometrický význam,



Obr. 9

který splývá s naším „hmotnostním“, uvažujeme-li trojici hmotných vrcholů trojúhelníku, ve kterých jsou „soustředěny“ stejné, například jednotkové hmotnosti. Je zřejmé, že identita (19) je pak zápisem Steinerovy

⁹ Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716, německý filosof, matematik, fyzik, vynálezce, právník a filolog, profesor univerzit v Lipsku a Jeně. Podobně jako Newton vytvořil základy diferenciálního a integrálního počtu.

věty, neboť na její levé straně stojí hodnota $J(X)$ příslušného momentu setrvačnosti a podle Jacobiova vzorce platí

$$J(T) = \frac{1 \cdot 1 \cdot a^2 + 1 \cdot 1 \cdot b^2 + 1 \cdot 1 \cdot c^2}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

(Kdybychom hodnotu $J(T)$ počítali přímo z definice, dostali bychom

$$J(T) = \left(\frac{2}{3}t_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t_c\right)^2 = \frac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2),$$

kde t_a, t_b, t_c jsou délky těžnic daného trojúhelníku.)

Zvolíme-li v dokázaném vzorci (19) za bod X střed kružnice danému trojúhelníku opsané, dostaneme tak pro její poloměr r dolní odhad

$$r \geq \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

V příručce [11, str. 142] jsou dokázány „podobné“ nerovnosti

$$r \geq \frac{1}{3}\sqrt{ab + bc + ca} \quad \text{a} \quad r \geq \frac{1}{3\sqrt{3}}(a + b + c).$$

Pravé strany posledních tří nerovností porovnejte sami. První z nich najdete také dokázanu v brožuře [7, str. 49], obsahující i spoustu dalších zajímavých geometrických nerovností.

10. Rovnice kružnice opsané trojúhelníku

Připomeňme nejprve, co je podle důsledku 3.4 množinou řešení každé rovnice

$$p \cdot |XA|^2 + q \cdot |XB|^2 + r \cdot |XC|^2 = \lambda, \quad (20)$$

ve které neznámý bod X probíhá rovinu daného trojúhelníku ABC , zatímco p, q, r, λ jsou daná reálná čísla splňující jedinou podmínku

$$p + q + r = 1. \quad (21)$$

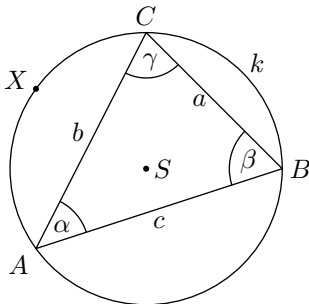
Značí-li T těžiště trojice hmotných bodů (A, p) , (B, q) a (C, r) , pak množina řešení rovnice (20) je neprázdná, právě když $\lambda \geq \lambda_0$, kde

$$\lambda_0 = p \cdot |TA|^2 + q \cdot |TB|^2 + r \cdot |TC|^2;$$

přítom pro $\lambda = \lambda_0$ má rovnice (20) řešení jediné ($X = T$), zatímco množiny řešení pro všechna $\lambda > \lambda_0$ vytvoří *systém všech kružnic* se společným středem T .

Uvedený výsledek o rovnicích (20) vnučí otázku, zda jimi lze popsat *všechny* kružnice roviny daného trojúhelníku ABC . Odpověď je kladná: je-li totiž bod S středem libovolně vybrané kružnice, existují čísla p, q, r s vlastností (21) taková, že výše zmíněným těžištěm T je právě bod S (viz [10]); číslům p, q a r se říká *barycentrické souřadnice* bodu S v soustavě určené trojúhelníkem ABC .

Vyzbrojení předchozí teorií, můžeme se teď pustit do hledání rovnice (20) pro kružnici k opsanou právě trojúhelníku ABC , jehož vrcholy jsou „konstantami“ hledané rovnice. Pěkným obratem se vyhneme přímému výpočtu příslušných barycentrických souřadnic: má-li být rovnice (20) rovnicí kružnice k (obr. 10), musejí jí vyhovovat body $X = A, X = B$ a také $X = C$! (Tato nutná podmínka je zřejmě i postačující,



Obr. 10

neboť kružnice procházející body A, B, C je jediná.) Dosazením tak získáme následující soustavu tří rovnic pro neznámé koeficienty p, q, r, λ (při obvyklém značení (17) délek stran trojúhelníku ABC):

$$\begin{aligned} X = A: & \quad p \cdot 0^2 + q \cdot c^2 + r \cdot b^2 = \lambda, \\ X = B: & \quad p \cdot c^2 + q \cdot 0^2 + r \cdot a^2 = \lambda, \\ X = C: & \quad p \cdot b^2 + q \cdot a^2 + r \cdot 0^2 = \lambda. \end{aligned}$$

Řešení této lineární soustavy je jediné (až na násobek):

$$\begin{aligned} p &= K \cdot a^2(b^2 + c^2 - a^2), & r &= K \cdot c^2(a^2 + b^2 - c^2), \\ q &= K \cdot b^2(c^2 + a^2 - b^2), & \lambda &= 2K \cdot a^2b^2c^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Konstantu K bychom mohli vyčíslit pomocí „normalizační“ podmínky (21), můžeme však dosadit nalezené hodnoty p, q, r, λ do rovnice (20)

s konstantou $K = 1$ (pro všechna $K \neq 0$ totiž dostaneme po dosazení navzájem ekvivalentní rovnice). Výsledek se ještě zjednoduší, upravíme-li výrazy v kulatých závorkách v (22) podle kosinových vět. Tak nakonec obdržíme rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC ve tvaru

$$a \cos \alpha \cdot |XA|^2 + b \cos \beta \cdot |XB|^2 + c \cos \gamma \cdot |XC|^2 = abc,$$

kde α , β a γ označují jako obvykle vnitřní úhly trojúhelníku ABC .

11. Druhý úkol pro čtenáře

Na základě výsledků předchozího oddílu najděte podmínky vyjádřené pomocí délek

$$a = |AB|, b = |BC|, c = |CD|, d = |DA|, e = |AC|, f = |BD| \quad (23)$$

stran a úhlopříček libovolného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, za kterých je tento čtyřúhelník tětíkový, tj. jeho vrcholy leží na jedné kružnici.

NÁVOD: Do rovnice (20) kružnice opsané trojúhelníku ABC dosadíte vrchol D . Budete-li při tomto postupu měnit role vrcholů čtyřúhelníku, budou vám vycházet „různé“ podmínky.¹⁰ Všechny jsou však ekvivalentní (na množině všech konvexních čtyřúhelníků) se známým kritériem tětíkovosti čtyřúhelníku, zvaným Ptolemaiovou¹¹ rovností: $ef = ac + bd$. Podaří se vám to dokázat?

12. Tětíkový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami

Takový je čtyřúhelník $ABCD$ na obr. 11, kde je také vyznačen průsečík E jeho úhlopříček, střed S opsané kružnice a její poloměr r . Dokážeme rovnost

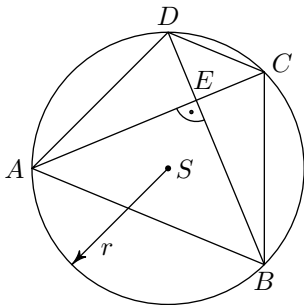
$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = 4r^2. \quad (24)$$

Využijeme k tomu samozřejmě funkci

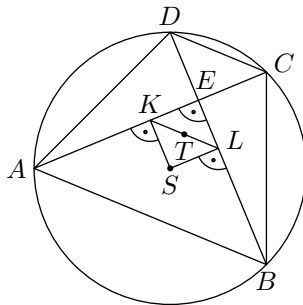
$$J(X) = |AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 + |DX|^2,$$

¹⁰ Je to způsobeno tím, že mezi prvky a, b, c, d, e, f libovolného čtyřúhelníku existuje algebraická závislost (společná pro všechny čtyřúhelníky). Proto lze tětíkovost čtyřúhelníku vyjádřit více algebraicky nezávislými mnohočleny uvedených šesti proměnných.

¹¹ Claudius Ptolemaios, asi 100–178 n.l., starořecký astronom, matematik a geograf. Zakladatel rovinné i sférické trigonometrie.



Obr. 11

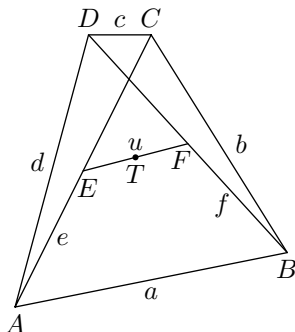


Obr. 12

tedy moment setrvačnosti soustavy, kterou dostaneme, když do vrcholů daného čtyřúhelníku umístíme (stejně) jednotkové hmoty. Protože na pravé straně (24) stojí hodnota $J(S)$, máme vlastně vysvětlit, proč platí $J(E) = J(S)$. Podle Steinerovy věty je poslední rovnost ekvivalentní s tím, že body E a S mají stejnou vzdálenost od těžiště T uvažované soustavy. To se ale zdůvodní snadno (obr. 12): Těžiště T je středem úsečky KL , kde K je střed úhlopříčky AC (tedy těžiště dvojice $\{A, C\}$) a L střed úhlopříčky BD (těžiště dvojice $\{B, D\}$); rovnost $|ET| = |ST|$ proto plyne z toho, že čtyřúhelník $SKEL$ je pravoúhelník. Důkaz (24) je tak hotov.

13. Eulerova věta o čtyřúhelníku

Takto se někdy nazývá porovnání (25) mezi součty čtverců nad stranami a nad úhlopříčkami libovolného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Podle obr. 13 označme E, F středy jeho úhlopříček, T střed úsečky EF a u



Obr. 13

její délku (přítom nevylučujeme ani případ $E = F = T$ neboli $u = 0$, který nastane, právě když $ABCD$ je rovnoběžník); využijme rovněž obvyklé značení (23). Bod T je zřejmě těžištěm čtveřice hmotných bodů $\{A, B, C, D\}$ o téže jednotkové hmotnosti. Proto při stanovení příslušného momentu setrvačnosti $J(X) = |AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 + |DX|^2$ v bodě $X = T$ můžeme uplatnit Jacobiův vzorec:

$$\begin{aligned} J(T) &= \frac{1 \cdot 1 \cdot a^2 + 1 \cdot 1 \cdot b^2 + 1 \cdot 1 \cdot c^2 + 1 \cdot 1 \cdot d^2 + 1 \cdot 1 \cdot e^2 + 1 \cdot 1 \cdot f^2}{1 + 1 + 1 + 1} = \\ &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \end{aligned}$$

Hodnotu $J(E)$ určíme „po částech“ na základě rovností

$$\begin{aligned} |AE|^2 + |CE|^2 &= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}e^2 = \frac{1}{2}e^2, \\ |BE|^2 + |DE|^2 &= |BF|^2 + |DF|^2 + (1 + 1) \cdot |EF|^2 = \frac{1}{2}f^2 + 2u^2 \end{aligned}$$

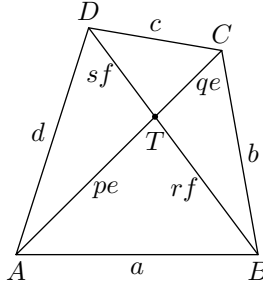
(ve druhém řádku jsme uplatnili Steinerovu větu o momentu setrvačnosti hmotné dvojice $\{B, D\}$ s těžištěm F vzhledem k bodu E). Sečtením zjistíme, že platí $J(E) = \frac{1}{2}(e^2 + f^2) + 2u^2$. Dosadíme-li konečně nalezená vyjádření $J(T)$, $J(E)$ do důsledku Steinerovy věty $J(E) = J(T) + 4|ET|^2$ ($= J(T) + u^2$), vyjde nám po algebraické úpravě kýžená rovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4u^2. \quad (25)$$

Všimněte si, že dokázaná Eulerova věta v sobě zahrnuje (případ $u = 0$) známou „rovnoběžníkovou“ identitu $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$.

14. Další věta o čtyřúhelníku

V předchozím oddílu jsme při odvozování Eulerovy věty „nadělili“ vrcholům čtyřúhelníku $ABCD$ stejné hmotnosti. Pozměňme nyní toto rozložení hmoty tak, aby se těžiště T čtveřice vrcholů čtyřúhelníku přeneslo do průsečíku jeho úhlopříček, a podívejme se, jak se při tom změní výsledek (25). Kromě obvyklého označení (23) zavedeme ještě kladné koeficienty p, q, r, s , které budou vyjadřovat, v jakém poměru dělí bod T každou



Obr. 14

z úhlopříček AC , BD (obr. 14):

$$\begin{aligned} p : q &= |AT| : |CT| \quad (p + q = 1), \\ r : s &= |BT| : |DT| \quad (r + s = 1). \end{aligned} \tag{26}$$

Potom při volbě hmotností

$$m_A = q, \quad m_C = p, \quad m_B = s, \quad m_D = r$$

bude bod T jak těžištěm dvojice bodů A , C , tak i těžištěm dvojice bodů B , D , takže bude těžištěm i celé čtveřice vrcholů. Hodnotu příslušného momentu setrvačnosti J v bodě T určíme jednak přímo z definice

$$J(T) = q(pe)^2 + p(qe)^2 + s(rf)^2 + r(sf)^2 = pqe^2 + rsf^2,$$

jednak z Jacobiova vzorce

$$J(T) = \frac{1}{2}(qsa^2 + psb^2 + prc^2 + qrd^2 + pqe^2 + rsf^2).$$

Srovnáním obou vyjádření a následnou jednoduchou algebraickou úpravou dostaneme tuto „variantu“ rovnosti (25):

$$qsa^2 + psb^2 + prc^2 + qrd^2 = pqe^2 + rsf^2. \tag{27}$$

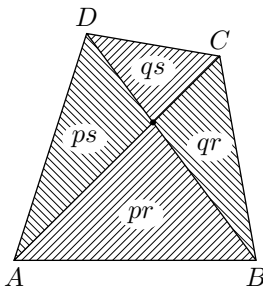
Doplňme k tomu krátký komentář. Levá strana dokázané rovnosti (27) je *váženým aritmetickým průměrem* obsahů čtverců nad stranami daného čtyřúhelníku, neboť součet čtyř vystupujících koeficientů je roven jedné:

$$qs + ps + pr + qr = (p + q) \cdot (r + s) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Navíc je zřejmé, že tyto koeficienty jsou ve stejném poměru jako obsahy čtyř trojúhelníků, na které je daný čtyřúhelník svými úhlopříčkami rozdělen (obr. 15):

$$qs : ps : pr : qr = P_{CDT} : P_{DAT} : P_{ABT} : P_{BCT}.$$

Pokud jde o pravou stranu (27), uveďme, že její hodnota nepřevyšuje čtvrtinu součtu $e^2 + f^2$, neboť číslo $\frac{1}{4}$ je zřejmě největší možná hodnota každého ze součinů $pq = p(1-p)$ a $rs = r(1-r)$.



Obr. 15

15. Další úkoly pro čtenáře

(i) Jsou dány dvě soustředné kružnice o poloměrech r a R , $r < R$. Tětiva AP menší kružnice je kolmá na tětivu BC větší kružnice, přitom bod P je společným bodem obou tětiv. Dokažte rovnost

$$|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 = 2(R^2 + r^2).$$

NÁVOD: Čtveřici bodů A , B , C a P přiřaďte stejné (jednotkové) hmotnosti. S ohledem na Steinerovu větu pak stačí vysvětlit, proč má bod P od těžiště zmíněné čtveřice stejnou vzdálenost jako společný střed obou kružnic.

(ii) Dva trojúhelníky mají společnou opsanou kružnici a společné těžiště. Dokažte, že se shodují i součty obsahů tří čtverců nad stranami každého z nich.

NÁVOD: Pro oba trojúhelníky užitě Leibnizův vzorec (19), ve kterém za bod X zvolíte střed kružnice opsané.

(iii) V článku [10] bylo dokázáno, že pokud vrcholům libovolného trojúhelníku ABC „nadělíme“ hmotnosti

$$m_A : m_B : m_C = |BC| : |AC| : |AB| = a : b : c,$$

bude taková soustava mít za těžiště střed vepsané kružnice. *Pomocí Steinerovy věty ukažte, že pro vzdálenost d tohoto středu od středu kružnice trojúhelníku opsané platí vzorec*

$$d^2 = r^2 - \frac{abc}{a+b+c}, \quad (28)$$

kde r je poloměr opsané kružnice. Vzpomenete-li si na dvojí vyjádření obsahu trojúhelníku ABC

$$P = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \varrho = \frac{abc}{4r},$$

kde ϱ je poloměr kružnice vepsané, můžete (28) přepsat ve tvaru $d^2 = r(r-2\varrho)$, z něhož vyplývá tzv. Eulerova nerovnost $r \geq 2\varrho$ (viz např. [7, str. 45]).

16. Soustavy s nulovou sumární hmotností

V každé z dosavadních ukázek jsme pracovali s momentem setrvačnosti

$$J(X) = \sum_{i=1}^N m_i \cdot |XA_i|^2 \quad (29)$$

v situaci, kdy se součet všech N koeficientů m_i nerovnal nule. Prozkoumejme nyní, jak se změní vlastnosti funkce J , když tato podmínka splněna není. (Jistě tušíte, že půjde o změnu vlastností „kvadratických“ na „lineární“.)

Prohlédneme-li si znovu vektorový výpočet při důkazu Steinerovy věty v odstavci 3.3, zjistíme, že za předpokladu

$$\sum_{i=1}^N m_i = 0 \quad (30)$$

má funkce $J: E_n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem (29) tuto vlastnost: Pro libovolné dva body $X, Y \in E_n$ platí rovnost

$$J(X) = J(Y) + 2\mathbf{X}\mathbf{Y} \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{Y}\mathbf{A}_i \right).$$

Co lze říci o vektoru v poslední závorce, vystupujícím v rovnosti (7) při definici pojmu těžiště? Vektorový součet

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{Z}\mathbf{A}_i \quad (31)$$

díky podmínce (30) *nezávisí* na výběru bodu $Z \in E_n$, jak ukazuje výpočet

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{Z}\mathbf{A}_i - \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{Z}'\mathbf{A}_i = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{Z}\mathbf{Z}' - \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{Z}'\mathbf{Z}' = \mathbf{0} \cdot \mathbf{Z}\mathbf{Z}' = \mathbf{0}.$$

Výsledek těchto úvah shrneme do následujícího tvrzení.

16.1. Věta. *Bud' $J: E_n \rightarrow \mathbb{R}$ funkce definovaná předpisem (29), v němž reálná čísla m_i splňují podmínku (30). Pak vektor $\boldsymbol{\omega}$ z rovnosti (31) nezávisí na výběru bodu $Z \in E_n$. Je-li vektor $\boldsymbol{\omega}$ nulový, je funkce J na celém prostoru E_n konstantní. Pokud naopak $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, pak pro libovolné dva body $X, Y \in E_n$ platí*

$$J(X) - J(Y) = 2\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{X}\mathbf{Y},$$

takže rovnost $J(X) = J(Y)$ nastane, právě když je vektor $\mathbf{X}\mathbf{Y}$ kolmý k vektoru $\boldsymbol{\omega}$. (Geometricky to znamená, že vrstevnice funkce J jsou v tomto případě přímky v E_2 , roviny v E_3 atd.¹²)

17. Dvojice bodů opačné hmotnosti

Popišme nejjednodušší situaci, kdy lze uplatnit výsledky předchozího odstavce. Předpokládejme tedy, že A a B jsou dva dané (různé) body roviny ϱ , které určují funkci

$$J(X) = |AX|^2 - |BX|^2 \quad (\text{pro každý bod } X \in \varrho),$$

jež je momentem setrvačnosti dvojice bodů A, B majících hmotnosti $m_A = 1$ a $m_B = -1$. (Vysvětlíte pomocí zákona páky, proč taková soustava hmotných bodů nemá těžiště.) Ve shodě s větou 16.1 nejprve vypočteme vektor $\boldsymbol{\omega}$ z definice (31):

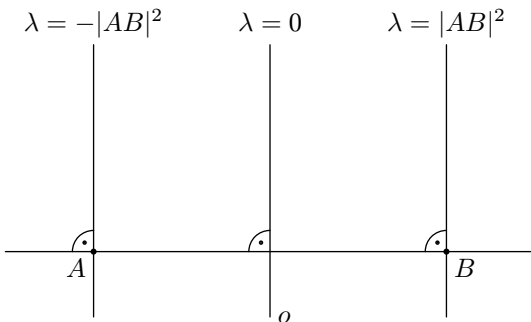
$$\boldsymbol{\omega} = 1 \cdot \mathbf{Z}\mathbf{A} + (-1) \cdot \mathbf{Z}\mathbf{B} = \mathbf{Z}\mathbf{A} - \mathbf{Z}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}.$$

¹² Srovnej s důsledkem 3.4.

Protože body A, B jsou různé, platí $\omega \neq \mathbf{0}$, takže podle věty 16.1 rovnice

$$|AX|^2 - |BX|^2 = \lambda \quad (32)$$

s parametrem $\lambda \in \mathbb{R}$ popisují *soustavu všech přímek kolmých na přímkou AB (tři z nich jsou nakresleny na obr. 16).*¹³



Obr. 16

18. Poslední úkoly pro čtenáře

(i) *Které čtyřúhelníky mají stejné oba součty obsahů čtverců nad protilehlými stranami?*

NÁVOD: Jsou to právě ty čtyřúhelníky, jejichž úhlopříčky jsou navzájem kolmé. Podmínku $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$ lze vyjádřit rovností $J(A) = J(C)$ pro moment setrvačnosti $J(X) = |XB|^2 - |XD|^2$.

(ii) *Dokažte Carnotovu¹⁴ větu: V rovině jsou dány dva trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$. Bodem B_1 je vedena kolmice na přímkou A_2A_3 , bodem B_2 kolmice na přímkou A_3A_1 a bodem B_3 kolmice na přímkou A_1A_2 . Tyto tři kolmice procházejí jedním bodem, právě když platí*

$$|B_1A_2|^2 + |B_2A_3|^2 + |B_3A_1|^2 = |A_1B_2|^2 + |A_2B_3|^2 + |A_3B_1|^2.$$

¹³ Tvrzení o rovnicích (32) lze snadno dokázat i bez vyložené teorie: stačí využít Pythagorovy věty pro trojúhelníky AXX' a BXX' , kde X' je kolmý průmět bodu X na přímkou AB . Tento alternativní postup je však neschůdný pro analýzu funkcí (29) o $N \geq 3$ členech, kdy se nejčastěji aplikuje metoda souřadnic (viz [5]).

¹⁴ Lasare Nicola Marguerite Carnot, 1753–1823, francouzský matematik, zároveň státní a vojenský činitel. Práce z geometrie, analýzy (pokus o teorii nekonečně malých veličin), aplikované mechaniky. Zavedl název *komplexní číslo*.

(Otázkám spojeným s Carnotovou větou je věnována celá kapitola úloh ve sbírce [9, str. 36–38]. Promyslete alespoň, jaký důsledek má fakt, že v uvedené rovnosti oba trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ vystupují „rovnoprávně“.)

NÁVOD: První ze tří zmíněných kolmic je přímkou o rovnici

$$|XA_2|^2 - |XA_3|^2 = |B_1A_2|^2 - |B_1A_3|^2.$$

Připojte k ní analogické rovnice pro ostatní dvě kolmice a pak analyzujte vzniklou soustavu tří rovnic.

(iii) V rovině daného trojúhelníku ABC nejprve uhadněte jedno řešení a pak úplně řešte rovnici

$$|AX|^2 + |BX|^2 = 2 \cdot |CX|^2.$$

NÁVOD: Všechna řešení X zaplní přímkou, která prochází středem kružnice opsané a je kolmá na těžnici ke straně AB . Aplikujte větu 16.1 na funkci

$$J(X) = |AX|^2 + |BX|^2 - 2 \cdot |CX|^2.$$

19. Závěr

Věřím, že předchozí ukázky dosvědčily, že rotační setrvačnost má vlastnosti, které se mohou „uplatnit“ v elementární geometrii. Při přípravě celého materiálu jsem v hledání fyzikálních interpretací geometrických problémů (jejichž zdrojem mi byly především „encyklopedické“ sbírky [8] a [9]) shledal zvláštní půvab. Zalíbí-li se takové interpretace i některým z vás čtenářů, budu navýsost spokojen.

Literatura:

- [1] Balk M. B. a Boltjanskij V. G.: *Геометрия масс*. Nauka, Moskva, 1987.
- [2] Boček L. a Zhouf J.: *Máte rádi kružnice?* Prometheus, Praha, 1995.
- [3] Dubrovskij V.: *Момент инерции в геометрии*. Příloha „Школа в Кванте — Геометрия“ časopisu Kvant č. 1 (1995), Vjuro Kvantum, Moskva, 1995.
- [4] Feynman R. P., Leighton R. B. a Sands M.: *Feynmanove přednášky z fyziky I*. Alfa, Bratislava, 1980.
- [5] Gutenmacher V. N. a Vasiljev N. B.: *Пřímký a kružnice*. Mladá fronta, edice ŠMM, svazek č. 51, Praha, 1982.
- [6] Horák S.: *Kružnice*. Mladá fronta, edice ŠMM, svazek č. 16, Praha, 1966.
- [7] Horák S.: *Nerovnosti v trojúhelníku*. Mladá fronta, edice ŠMM, svazek č. 57, Praha, 1986.
- [8] Prasolov V. V.: *Задачи по планиметрии I, II*. Nauka, Moskva, 1986.
- [9] Šarygin I. F.: *Задачи по геометрии. Планиметрия*. 2. vydání, Nauka, Moskva, 1986.
- [10] Šimša J.: *Archimédova statika v geometrii*. Rozhledy matematicko-fyzikální 74 (1997), 14–24, 57–64. Viz rovněž tento vzdělávací portál MU.
- [11] Švrček J. a Vanžura J.: *Geometrie trojúhelníka*. SNTL, Praha, 1988.