Potenciální energie a rovnováha sil v geometrii

JAROMÍR ŠIMŠA

Abstrakt. Článek je podrobným výkladem tématu, ve kterém se pojí základy dvou disciplin: eukleidovské geometrie a newtonovské mechaniky. Způsobem zpracovaní je příspěvek úplným podkladem pro demonstraci mezipředmětové kooperace při výuce matematiky a fyziky na čtyřletých gymnáziích.

Úvod

Těsná spolupráce matematiků a fyziků vyvěrá ze společných základů a hustého přediva vztahů mezi oběma vědními obory. Všichni si uvědomujeme, jak je matematika pro fyziku nepostradatelná (ať už jde o její výuku či výzkum). Dobře známá je také skutečnost, že právě fyzika je tou přírodní vědou, která v minulosti nejvíce stimulovala vznik nových matematických teorií, a že tento blahodárný účinek neochabuje ani dnes. Dochází k tomu (velmi zjednodušeně řečeno) tak, že badatel-fyzik nejprve vytvoří ke zkoumanému jevu teoretický model a předá ho pak matematikovi s úkolem, aby model analyzoval. (Často se obě zmíněné role prolínají v jediné postavě teoretického fyzika.) Méně obvyklé jsou opačné situace, kdy si matematik pomůže při řešení určitého problému tak, že ho „zakóduje“ do vhodného fyzikálního objektu, na něj pak uplatní příslušné fyzikální zákony, a tak se nepřímo dozví něco užitečného o řešení původního matematického problému. Někdy jde „pouze“ o nápovědu výsledku, jindy dokonce o vytýčení cesty, jak k němu dospět.

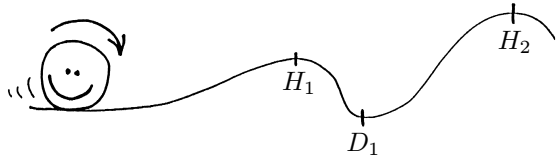
Některé aplikace fyziky v matematice jsme mohli poznat již ve dvou článcích [3] a [4]. Lze se v nich dočíst, kolik důležitých geometrických výsledků je možné odvodit úvahami o různých *soustavách hmotných bodů*. Název tohoto třetího článku naznačuje, že také tento text bude zaměřen na aplikace newtonovské mechaniky v geometrii. Tentokrát se bez náročnějších výpočtů zaměříme na popis několika typů „hejbátek“ v homogenním gravitačním poli a rozbor geometrických úloh, které jim odpovídají.

Princip minima

Principu, o který se budeme zajímat, se podřídí například naše tělesná schránka, kdykoliv nám na namrzlém chodníku ujedou nohy. Posuďme však raději tento druh účinku gravitačního pole Země v mírnější podobě. Ve známém pohádkovému příběhu [1] se vypráví o tom, jak

... na veliký svátek, byl to právě pátek,
řekl děda: „Babičko, sněd bych něco maličko.“
„Dědo, to je nadělení, doma už nic k snědku není!“
„To ti stále radit mám, nač tě bábo, nač tě mám...
Mouka, mléko, vajíčko, koblížek chci babičko!“
Babička se ohání, honem k plotně uhání.
Když koblížek usmaží, na okno ho položí.
Koblížek se povaluje, kolem sebe pokukuje.
Až tu náhle zasměje se, poskočí, z okna dolů seskočí.
Pak pryč rychle upaluje, rošťácky se pošklebuje...

Zastavme na tomto místě děj příběhu a předpokládejme, že koblížek náhle přijde o zdroj svého pohybu. Stane se z něj obyčejný kutálející se předmět, který se zastaví, dejme tomu, někde na trase mezi sousedními vrcholky H_1 a H_2 cesty znázorněné na obr. 1. V kterém místě konkrétně?



Obr. 1

Již zkušenosti z předškolního věku nám napoví, že koblížek skončí svou pouť v *nejnižším* bodě D_1, bude-li povrch dráhy ideálně hladký (v reálné situaci může koblížek např. uvíznout někde v trávě na svahu mezi D_1 a H_2). Není-li ovšem koblížek homogenní koule (labužníci si jistě vybaví slast při kousnutí potvrzujícím, že koblížek není ošizen o marmeládovou bublinu narušující jeho homogenitu) a známe-li něco ze základů fyziky, bude znít naše odpověď takto: „Na ideálně hladké dráze mezi body H_1 a H_2 se koblížek zastaví v té poloze, ve které bude *nejníže* jeho těžiště.“ V této poloze má koblížek nejmenší (tíhovou) *potenciální energii*. Jak víme z hodin fyziky, jde o veličinu W_p definovanou (pro těleso o hmotnosti m nacházející se v homogenním tíhovém poli s tíhovým zrychlením g) pomocí vzorce

$$W_\mathrm{p} = mgh, \tag{1}$$

kde h je výška, ve které se nalézá těžiště daného tělesa nad úrovní, které přiřazujeme hodnotu $W_\mathrm{p} = 0$ (například povrch Země); nachází-li se těžiště tělesa pod touto úrovní, považujeme výšku h ve vzorci (1) za zápornou, takže v tomto případě $W_\mathrm{p} < 0$. Pokud místo tělesa uvažujeme konečnou soustavu hmotných bodů, přejde vzorec (1) do tvaru

$$W_\mathrm{p} = \sum_{k=1}^{N} m_k g h_k, \tag{2}$$

kde m_k je hmotnost k-tého bodu soustavy a h_k jeho výška nad úrovní $W_\mathrm{p} = 0$.

Princip minima potenciální energie můžeme vyjádřit takto:

Pokud na danou soustavu hmotných bodů nepůsobí žádná vnější síla kromě tíhové síly a reakcí neměnného prostředí, které pohyb soustavy omezují, nalezne soustava klidu jen v poloze, ve které její tíhová potenciální energie dosahuje (alespoň lokálního) minima.

Koblížek dosáhne klidu jen v poloze, kdy se navzájem vyruší účinky dvou sil, které na něj působí: tíhové síly a tlakové reakce povrchu dráhy. Příslušnou analýzou *rovnováhy sil* budeme zjišťovat možné klidové polohy všech našich soustav, které budeme v dalším textu zkoumat.

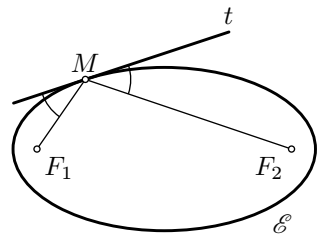
Tečny a ohniska kuželoseček

Prvním naším námětem bude jedno ze základních tvrzení teorie kuželoseček o poloze jejich tečen vzhledem k ohniskům. Vyložíme vše způsobem srozumitelným i těm mladším čtenářům, kteří ještě o elipsách, parabolách a hyperbolách téměř nic neslyšeli. Tím více budou moci zkušenější čtenáři ocenit, jak rychle a elegantně (tj. téměř bez výpočtů) se dostaneme ke kýženému cíli.

Elipsa je množina všech těch bodů M roviny, které mají od pevných bodů F_1, F_2 týž součet vzdáleností, který označíme l:

$$|MF_1| + |MF_2| = l; \tag{3}$$

přitom (kvůli trojúhelníkové nerovnosti) předpokládáme, že daná délka l je větší než vzdálenost daných bodů F_1 a F_2. Ty se nazývají *ohnisky* dané elipsy. Příklad elipsy s jedním vyznačeným bodem M vidíte na obr. 2. Je

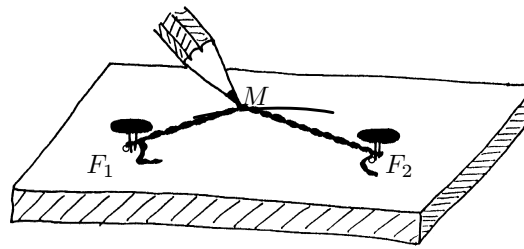


Obr. 2

to uzavřená čára $\mathscr{E}$, která má tvar vajíčka s dvěma navzájem kolmými osami souměrnosti (jedna z nich je osa úsečky F_1F_2, druhá přímka F_1F_2). Na stejném obrázku vidíte také přímku t, která prochází bodem M elipsy a nemá s ní společný žádný jiný bod. Taková přímka je jediná (pro každý bod M elipsy jiná) a nazývá se *tečnou* dané elipsy s bodem dotyku M. Na témže obrázku jsou vyznačeny ještě dva úhly, které svírají spojnice bodu M s ohnisky F_1, F_2 s tečnou t. Právě o ně nám teď půjde. Je pozoruhodné, že tyto úhly jsou shodné, ať je bod M vybrán na elipse jakkoliv:

Tečna elipsy svírá stejné úhly s oběma úsečkami, které spojují bod dotyku tečny s ohnisky elipsy.

Fyzikální důkaz uvedeného tvrzení uvedeme zmínkou o tom, že definice (3) umožňuje elipsu nakreslit tzv. provázkovou metodou (obr. 3): V ohniscích F_1, F_2 upevníme konce provázku, jehož délka se rovná délce l

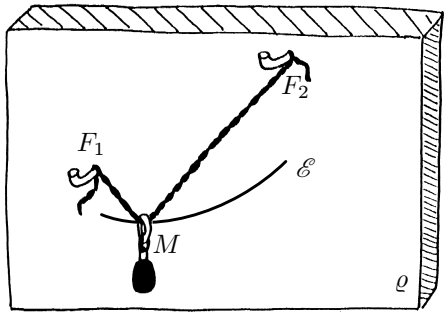


Obr. 3

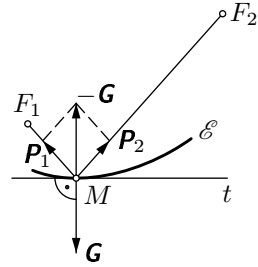
z pravé strany (3); hrotem tužky pak pohybujeme po rovině kreslicí desky tak, aby byl provázek neustále napnutý. Je zřejmé, že všechny možné polohy hrotu M jsou popsány rovnicí (3), takže stopa, kterou hrot tužky v kreslicí rovině zanechá, je právě naše elipsa.

Nyní do kreslení elipsy zapojíme tíhové pole Země. Dříve než zmíněný

provázek délky l upevníme v ohniscích F_1, F_2, navlečeme na něj malý kroužek M s upevněným závažím a kreslicí desku otočíme do svislé polohy (obr. 4). Provázek se pod tíhou závaží napne, takže kroužek M se bude dotýkat kreslicí roviny ϱ v některém bodě elipsy $\mathscr{E}$ dané rovnicí (3). Budeme-li kreslicí desku otáčet tak, aby kreslicí rovina ϱ zůstávala svislá, vykreslí nám v ní stopa kroužku M celou elipsu $\mathscr{E}$.



Obr. 4

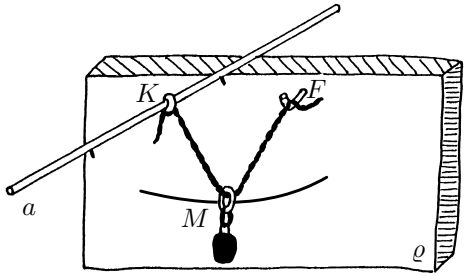


Obr. 5

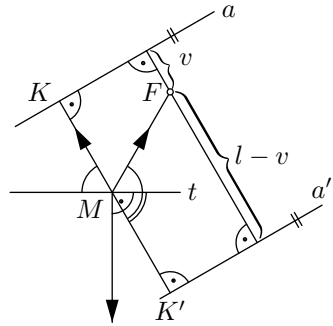
Proveďme nyní fyzikální rozbor právě popsaného hejbátka. Při pevné poloze kreslicí desky se podle principu minima kroužek M přemístí v rovině ϱ do nejnižší možné polohy. Elipsa $\mathscr{E}$ je tudíž natočena tak, že bod M je její nejnižší bod. Vedeme-li proto bodem M ve (svislé) rovině ϱ vodorovnou přímku t, bude celá elipsa $\mathscr{E}$ s výjimkou bodu M ležet nad touto přímkou, takže přímka t je tečnou elipsy s bodem dotyku M. Na kroužek v bodě M působí tři síly: tíhová síla $\boldsymbol{G}$ (kolmá k vodorovné přímce t) a dvě síly $\boldsymbol{P_1}$ a $\boldsymbol{P_2}$ téže velikosti (reakce napnutého provázku) ležící na přímkách MF_1 a MF_2 (obr. 5). Protože tyto tři síly jsou v rovnováze, je svislý vektor $-\boldsymbol{G}$ roven vektoru $\boldsymbol{P_1} + \boldsymbol{P_2}$. Tento vektorový součet je na obrázku sestrojen pomocí rovnoběžníku sil, který je vzhledem k podmínce $|\boldsymbol{P_1}| = |\boldsymbol{P_2}|$ kosočtvercem. To znamená, že vektory $\boldsymbol{P_1}$ a $\boldsymbol{P_2}$ jsou umístěny souměrně podle svislé přímky vektorů $\boldsymbol{G}$ a $-\boldsymbol{G}$, tudíž jejich přímky MF_1 a MF_2 svírají s (vodorovnou) tečnou t shodné úhly. Tím je celý fyzikální důkaz hotov.

U další kuželosečky, kterou pojmenujeme později, zvolíme odlišný postup výkladu: od fyzikálního objektu k matematické interpretaci. Použijeme opět kreslicí desku (obr. 6), se kterou pevně spojíme tenkou tyč, po které se bude volně pohybovat kroužek K. Budeme předpokládat, že tyč je velice těsně nad kreslicí rovinou ϱ, takže ji můžeme ztotožnit

s přímkou a této roviny. Na kroužek K přivážeme jeden konec provázku, po kterém bude jako dříve klouzat závaží na kroužku M. Druhý konec provázku připevníme na fixní závěs F v rovině ϱ. Celý objekt je určen dvěma parametry: délkou l provázku a vzdáleností v bodu F od přímky a. Zřejmě $l > v$.



Obr. 6



Obr. 7

Zatímco hejbátko z obr. 4 pro kreslení elipsy mělo jeden stupeň volnosti, to nové z obr. 6 má tyto stupně dva: kromě pohybu kroužku M po provázku ještě pohyb kroužku K po tyči. Rovnováha sil působících na kroužek K se zřejmě vyjádří podmínkou, že úsek KM provázku je kolmý k přímce a. Úvahou o silách působících na kroužek M se jako dříve zdůvodní, že vodorovná přímka t, která prochází bodem M, svírá shodné úhly s oběma úsečkami MK a MF. Obě podmínky vyznačíme do obr. 7, kam ještě přikreslíme pomocný bod K' (ležící na polopřímce KM ve vzdálenosti l od jejího počátku K) a pomocnou přímku a' (jdoucí bodem K' rovnoběžně s přímkou a). Význam přímky a' se ozřejmí z dvojího vyjádření délky l:

$$l = |FM| + |MK| \qquad \text{(provázek)}$$

a

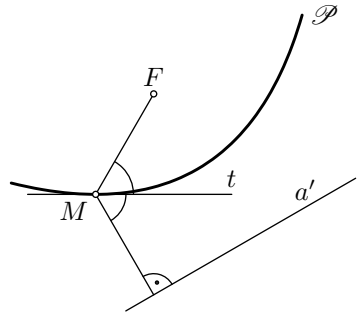
$$l = |KK'| = |K'M| + |MK| \qquad \text{(definice } K'\text{)},$$

odkud plyne klíčová rovnost $|FM| = |K'M|$. Bod M má tedy stejnou vzdálenost od bodu F jako od přímky a':

$$|MF| = |Ma'|. \tag{4}$$

Zdůrazněme, že přímka a' je pevná přímka roviny ϱ, konkrétně rovnoběžka s přímkou a ležící od ní ve vzdálenosti l na stejné straně jako bod F. Přímka a' se tedy v rovině ϱ nemění, když celou kreslicí desku natáčíme do různých poloh.

Množina $\mathscr{P}$ všech bodů $M \in \varrho$, které splňují rovnost (4) pro daný bod F a danou přímku a', je křivka zvaná *parabola*; bod F se nazývá jejím *ohniskem* a přímka a' její *řídicí přímkou*. Narozdíl od elipsy je parabola křivka neomezená (tj. neleží v žádném kruhu), proto je na obr. 8 nakreslena jen její část poblíž ohniska F. Podle principu minima



Obr. 8

pro potenciální energii zaujme kroužek závaží (při pevné poloze kreslicí desky) polohu odpovídající nejnižšímu bodu M paraboly $\mathscr{P}$ určené podmínkou (4). Proto vodorovná přímka t procházející bodem M bude její tečnou a dříve zdůvodněná shodnost úhlů vyznačených v obr. 7 (a též obr. 8) vede k tomuto závěru:

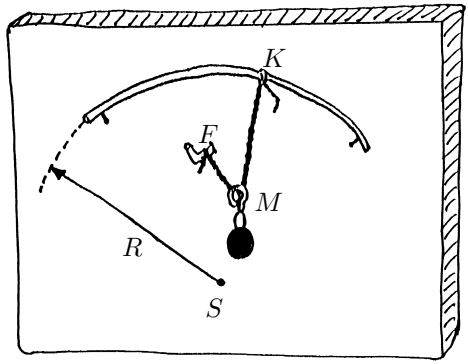
Tečna paraboly svírá se spojnicí svého ohniska a bodu dotyku tečny stejný úhel jako s kolmicí spuštěnou z bodu dotyku na řídicí přímku paraboly.

Vysvětleme ještě, proč dokázané tvrzení platí pro libovolnou tečnu paraboly $\mathscr{P}$ s daným ohniskem F a danou řídicí přímkou a', i když hejbátkem z obr. 6 můžeme pomocí otáčení nakreslit jen část paraboly $\mathscr{P}$: K nakreslení větší části $\mathscr{P}$ stačí posunout tyč a do libovolné vzdálenosti $l' > l$ od přímky a' a zároveň prodloužit provázek na tutéž délku l'.

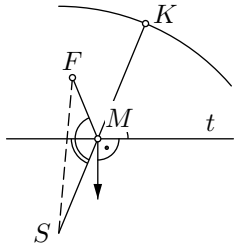
Posledním druhem kuželoseček, o kterých jsme se dosud nezmínili, jsou *hyperboly*. Každá z nich je množinou všech těch bodů M roviny, které mají rozdíl vzdáleností od daných bodů F_1, F_2 (ohnisek hyperboly) rovný dané délce l:

$$|MF_1| - |MF_2| = \pm l \tag{5}$$

(samozřejmě se předpokládá, že $l < |F_1F_2|$), přitom každému z obou znamének v (5) odpovídá jedna *větev* hyperboly. Sami analyzujte hejbátko z obr. 9 (lišící se od hejbátka z obr. 6 tím, že tenká tyč je nahrazena tenkou kruhovou obručí) a zjistěte tak, co platí pro polohu tečen hyperboly vzhledem k jejím ohniskům (za nápovědu či pro kontrolu vám poslouží obr. 10). Zvažte rovněž, jak hejbátko „nakonfigurovat“, aby nakreslilo část jedné větve předem dané hyperboly.



Obr. 9



Obr. 10

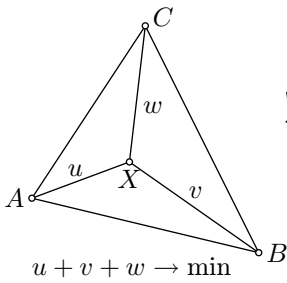
Cvičení. Navrhněte hejbátka pro kreslení „zobecněných elips“ určených místo podmínky (3) rovnicí

$$k_1 \cdot |MF_1| + k_2 \cdot |MF_2| = l$$

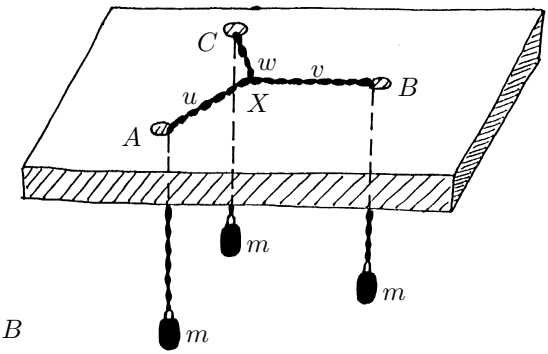
(kde k_1, k_2 jsou daná přirozená čísla) a zjistěte, co platí pro polohu jejich tečen vzhledem k bodům F_1, F_2. O takové křivky se ve svém mládí zajímal vynikající skotský fyzik James Clerk Maxwell (1831–1879), tvůrce teorie elektromagnetického pole (viz příspěvek dr. Podolského v Rozhledech 5/1999).

Dopravní úlohy

Pod název tohoto paragrafu matematikové zahrnují širokou škálu optimalizačních úloh, ve kterých se vždy minimalizuje určitý *součet několika vzdáleností*. Takové úlohy se často objevují v praxi a jejich vyřešení může přinést nemalé úspory nákladů. Když například autodopravce má za úkol rozvést zboží několika odběratelům, vyplatí se mu předem rozmyslet, která z možných tras spojujících všechna místa určení je ta nejkratší.



Obr. 11



Obr. 12

Úloha 1. *V rovině daného trojúhelníku ABC najděte ten bod X, pro který má součet $|AX|+|BX|+|CX|$ nejmenší možnou hodnotu (obr. 11).*

Poznamenejme nejdříve, že z úvah o spojitosti vyplývá, že Úloha 1 má pro každý trojúhelník ABC řešení. Příslušný bod X se často nazývá *dopravní střed trojúhelníku ABC*.

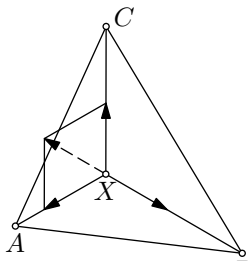
Fyzikální řešení Úlohy 1 najdeme pomocí soustavy tří závaží téže hmotnosti m (obr. 12). Daný trojúhelník ABC leží v rovině ϱ vodorovné desky, do které jsou v bodech A, B, C provrtány úzké otvory. Zmíněná závaží jsou zavěšena na třech provázcích téže délky l, provlečených otvory a svázanými do uzlíku představujícího proměnný bod $X \in \varrho$. Předpokládejme, že délka l je dostatečně velká, abychom mohli uzlíkem pohybovat těsně nad celým trojúhelníkem ABC i jeho blízkým okolím. Jestliže uzlík ze sevření naší ruky kdekoliv uvolníme, začne se pod vlivem napnutých provázků pohybovat. Jak za okamžik vysvětlíme, pro některé trojúhelníky ABC uvolněný uzlík v určité (jediné) poloze X nalezne klidu, pro jiné trojúhelníky ABC jeho pohyb skončí „katastrofou“: uzlík bude vtažen do jedné z dírek.

Dříve než pomocí rovnováhy sil klidovou polohu uzlíku geometricky určíme, vyjádříme její význam na základě principu minima potenciální energie. Označme délky částí provázků v rovině ϱ písmeny u, v, w jako na obr. 12 a považujme rovinu ϱ za nulovou úroveň potenciální energie. Pak potenciální energie naší soustavy tří závaží je záporná a podle (2) je vyjádřena vzorcem

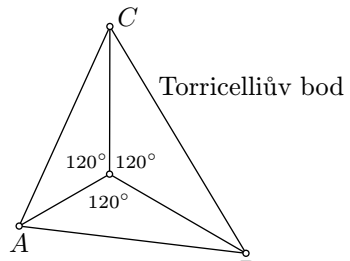
$$\begin{aligned} W_{\mathrm{p}} &= -mg(l-u) - mg(l-v) - mg(l-w) = \\ &= -3mgl + mg(u+v+w) \end{aligned}$$

(hmotnosti provázků totiž zanedbáváme). Odtud plyne, že naše soustava má nejmenší potenciální energii, právě když se uzlík nachází v dopravním středu trojúhelníku ABC. Řešení Úlohy 1 proto teď nalezneme rozborem rovnováhy sil působících na uzlík naší soustavy.

Jedná se o tři síly téže velikosti mg, které působí na polopřímkách XA, XB, XC (obr. 13). Dvě z nich jsou na našem obrázku sečteny po-



Obr. 13



Obr. 14

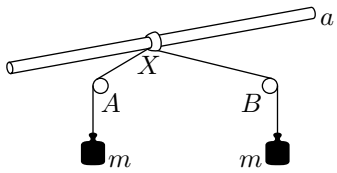
mocí rovnoběžníku (kosočtverce) sil, vektor třetí síly musí být opačný k sestrojenému součtu prvních dvou. Vyznačená úhlopříčka kosočtverce je tedy shodná s jeho stranou, takže zřejmě rozděluje kosočtverec na dva rovnostranné trojúhelníky. Analýza rovnováhy je u konce: každé dvě z polopřímek XA, XB, XC svírají úhel 120°. Takový bod X (pokud existuje) se v trojúhelníku ABC snadno sestrojí pomocí kruhových oblouků, ze kterých jsou jeho strany vidět pod úhlem 120°. Není těžké vysvětlit, že takový bod X (zvaný často *Torricelliův* bod trojúhelníku ABC, obr. 14) existuje a je jediný, pokud každý vnitřní úhel trojúhelníku ABC je menší než 120°. Zdůvodněte, proč ostatní trojúhelníky ABC mají svůj dopravní střed ve vrcholu příslušného tupého vnitřního úhlu, místě, kde také dojde ke „katastrofě“ našeho uzlíku.

Podali jsme podrobné fyzikální řešení Úlohy 1. U dalších dopravních úloh už bude náš výklad stručnější. První z nich je úloha, která nechybí snad v žádné učebnici geometrie v příslušné kapitole o osové souměrnosti.

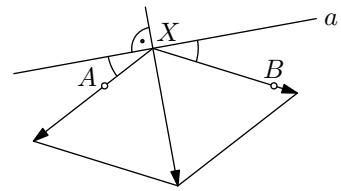
Úloha 2. *Dané body A a B leží v téže polorovině s danou hraniční přímkou a. Najděte ten bod $X \in a$, pro který má součet $|AX| + |BX|$ nejmenší možnou hodnotu.*

Jednoduché hejbátko pro řešení této úlohy vidíte na obr. 15a: po tenké tyči představující přímku a se pohybuje kroužek, který hraje roli proměnného bodu X. Ke kroužku jsou přivázány dva provázky, napínané přes kladky v místech A, B dvěma závažími téže hmotnosti. (Body A, B

a přímka a leží v téže vodorovné rovině. Místo kladek jsme mohli opět použít rovinnou desku s dvěma otvory v bodech A, B.) Podobně jako při řešení Úlohy 1 se vysvětlí, proč minimum potenciální energie takové soustavy odpovídá té poloze X kroužku, která je řešením Úlohy 2. V klidové poloze musí být výslednice dvou stejně velkých sil, kterými působí napnuté provázky na kroužek, síla opačná k silové reakci tyče na kroužek, tedy síla s vektorem kolmým na přímku a (obr. 15b). Odtud plyne známý výsledek, že přímky AX a BX musejí být souměrně sdružené podle osy a, takže řešením X je průsečík přímky a s úsečkou AB', kde B' je bod souměrně sdružený s bodem B podle osy a.



Obr. 15a



Obr. 15b

Úloha 3. *V rovině daného trojúhelníku ABC je dána přímka a. Najděte ten bod $X \in a$, pro který má součet $|AX|+|BX|+|CX|$ nejmenší možnou hodnotu.*

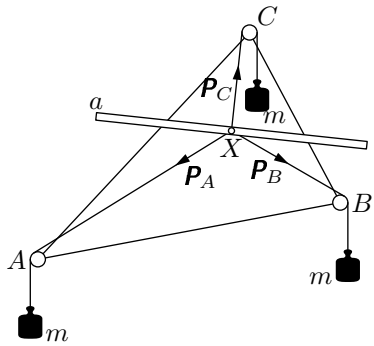
Obr. 16 ukazuje, jak vypadá pomocné hejbátko pro tuto úlohu. Jeho popis a výpočet příslušné potenciální energie zde vynecháme stejně jako geometrický rozbor podmínky

$$\boldsymbol{P}_A + \boldsymbol{P}_B + \boldsymbol{P}_C \perp a,$$

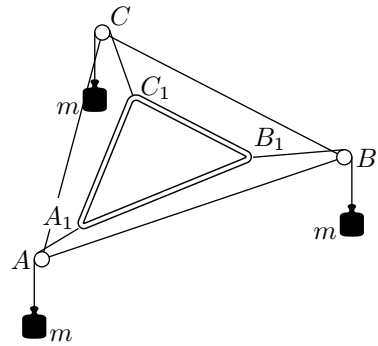
jež je vyjádřením rovnováhy sil působících na kroužek v hledané klidové poloze.

Úloha 4. *Do „většího“ daného trojúhelníku ABC umístěte „menší“ daný trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, aby součet $|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|$ byl co nejmenší.*

Tentokrát si pomůžeme tak, že menší trojúhelník $A_1B_1C_1$ vymodelujeme z tenkého pevného drátu (obr. 17). Tento model při pohybu způsobeném napnutými provázky zůstává ve vodorovné rovině trojúhelníku, takže potenciální energie celé soustavy je jako v dřívějších situacích dána polohou tří zavěšených závaží. Upozorněme však, že analýza rovnováhy



Obr. 16



Obr. 17

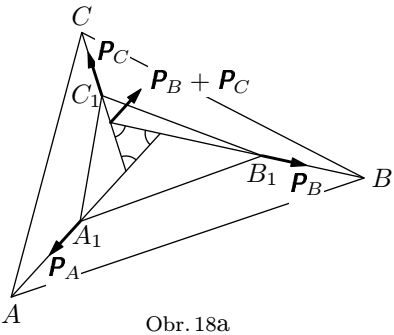
sil se v této úloze liší od předchozích ukázek, ve kterých vždy několik sil působilo na *hmotný bod*. Nyní tři stejně velké síly $\boldsymbol{P}_A$, $\boldsymbol{P}_B$, $\boldsymbol{P}_C$ (ležící na přímkách AA_1, BB_1, CC_1) působí na *pevné těleso*, model trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Z fyziky víme, že tehdy podmínka

$$\boldsymbol{P}_A + \boldsymbol{P}_B + \boldsymbol{P}_C = \boldsymbol{0},$$

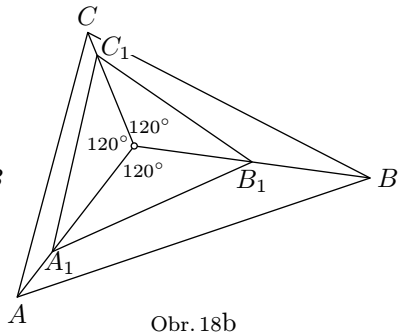
která je zřejmě splněna, právě když každé dvě z polopřímek A_1A, B_1B, C_1C svírají úhel 120°, k vyrušení dynamických účinků těchto sil nestačí. Je zapotřebí ještě navíc požadovat, aby přímky A_1A, B_1B a C_1C procházely jedním bodem (pak je to zřejmě společný Torricelliův bod trojúhelníků ABC a $A_1B_1C_1$). Tak na obr. 18a tento doplňující požadavek splněn není: síly $\boldsymbol{P}_A$ a $\boldsymbol{P}_B + \boldsymbol{P}_C$ tvoří tzv. *dvojici sil*, která zapůsobí na model trojúhelníku $A_1B_1C_1$ otáčivým účinkem. Výsledek našich úvah můžeme shrnout takto: Za jistých předpokladů na velikost a tvar daných trojúhelníků je řešením Úlohy 4 takové jejich umístění, kdy přímky A_1A, B_1B a C_1C procházejí Torricelliovým bodem obou trojúhelníků ABC a $A_1B_1C_1$ (obr. 18b).

Úloha 5. *V daném trojúhelníku ABC o obvodu o sestrojte trojúhelník XYZ o daném obvodu $o' < o$ tak, aby součet $|AX| + |BY| + |CZ|$ byl co nejmenší.*

Na obr. 19 vidíte uvnitř vodorovně uloženého trojúhelníku ABC smyčku délky o' z tenkého provázku. Na ní jsou navlečeny tři kroužky s upevněnými provázky, které přes kladky v bodech A, B, C napnou tři znázorněná závaží téže hmotnosti m. Následkem toho se smyčka vytvaruje do jistého trojúhelníku XYZ (nedojde-li ovšem dříve k tomu,

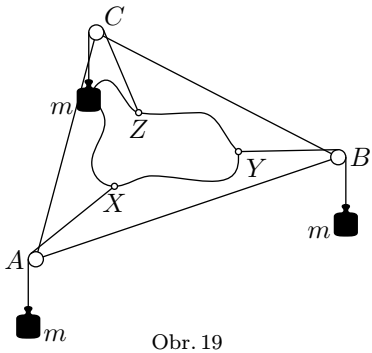


Obr. 18a

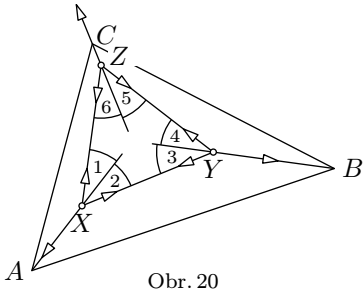


Obr. 18b

že jeden z kroužků „doputuje“ ke kladce). Tento trojúhelník je, jak se snadno zjistí úvahou o minimu potenciální energie, řešením naší úlohy. Na každý ze tří kroužků tehdy působí tři síly (obr. 20); z jejich rovnováhy se pro očíslované úhly nejprve z kosočtverců sil odvodí rovnosti $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$, $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$, $\measuredangle 5 = \measuredangle 6$, a poté i $\measuredangle 1 = \measuredangle 3 = \measuredangle 5$ (neboť stejnou velikost má nejen šest sil působících na obvodu trojúhelníku XYZ, ale i tři síly na přímkách AX, BY, CZ — kvůli shodným závažím). Tak docházíme k závěru, že (za jistých předpokladů) je řešením Úlohy 5 rovnostranný trojúhelník XYZ uložený do trojúhelníku ABC stejně jako trojúhelník $A_1B_1C_1$ v odpovědi k Úloze 4.



Obr. 19



Obr. 20

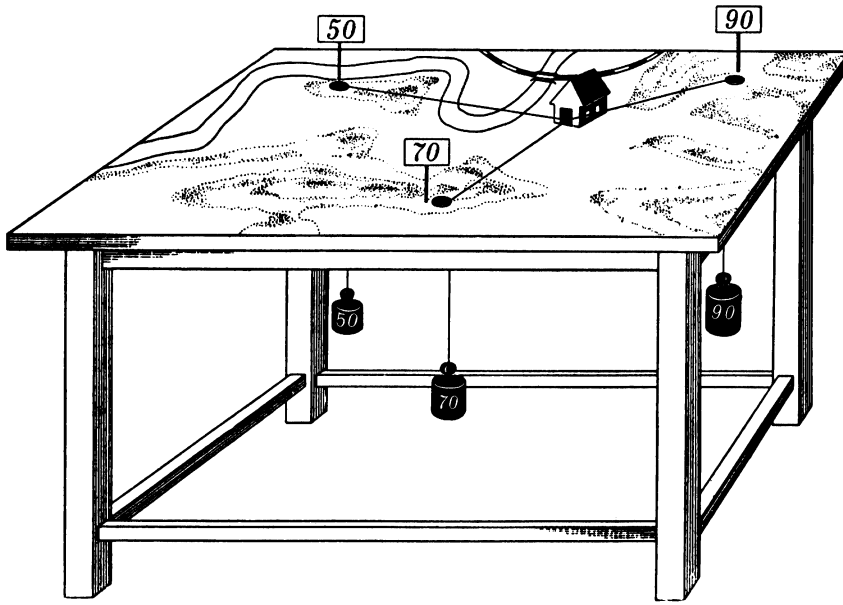
Cvičení. *V daném obdélníku $ABCD$ o obvodu o sestrojte čtyřúhelník $KLMN$ o daném obvodu $o' < o$ tak, aby součet délek $|AK| + |BL| + |CM| + |DN|$ byl co nejmenší.* (Řešení je na obr. 21, kde body U, V

jsou průsečíky os vnitřních úhlů obdélníku $ABCD$. Pokud $o' \leqq 2 \cdot |UV|$, zdegeneruje čtyřúhelník $KLMN$ v úsečku.)

Dopravní úlohy, které jsme v tomto paragrafu uvedli, můžeme rozmanitě modifikovat a zobecňovat. Prakticky významnou je v tomto ohledu situace, kdy v minimalizovaném součtu vzdáleností jsou jednotlivé sčítance opatřeny různými *váhovými koeficienty*. Tak například v modifikované Úloze 1 hledáme ten bod X, ve kterém nabývá nejmenší hodnoty součet

$$p \cdot |AX| + q \cdot |BX| + r \cdot |CX|,$$

kde p, q, r jsou daná kladná čísla. Je celkem zřejmé, že k řešení takové úlohy stačí upravit hejbátko z obr. 12 tak, že na provázky zavěsíme tři (nestejná) závaží, jejichž hmotnosti jsou v poměru $p : q : r$ (obr. 22



Obr. 22

převzatý z brožury [5]). Důležitým zobecněním je rovněž přechod od tří k většímu počtu sčítaných vzdáleností, tedy minimalizace součtů

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |A_i X|$$

s danými body A_i a danými koeficienty $p_i > 0$ za podmínky, že bod X probíhá danou geometrickou množinu (celou rovinu, přímku, kruh apod.). Jiného typu jsou dvě dopravní úlohy v následujícím cvičení. Také ty lze řešit fyzikálně pomocí vhodných hejbátek; vymyslete je sami.

Cvičení. *V rovině ϱ jsou dány body A, B, C, D.*

a) *Najděte body $X, Y \in \varrho$ tak, aby úsečka XY měla předepsanou délku a aby součet $|AX| + |BX| + |CY| + |DY|$ byl co nejmenší.*

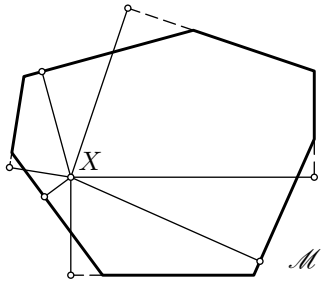
b) *Najděte ty body $X, Y \in \varrho$, pro které je co nejmenší součet $|AX| + |BX| + |CY| + |DY| + |XY|$.*

Z geometrie konvexních mnohoúhelníků

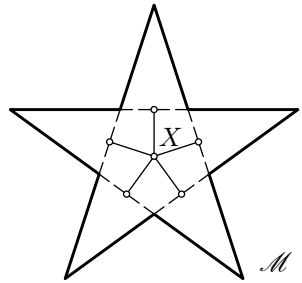
Na závěr celého příspěvku vyřešíme fyzikální cestou jednu zajímavou úlohu o obecném mnohoúhelníku. Dotkneme se přitom rovněž otázky perpetua mobile. Zadání úlohy zní takto:

Uvnitř konvexního mnohoúhelníku $\mathscr{M}$ je zvolen libovolný bod X. Spustíme z něj kolmice na všechny přímky určené stranami mnohoúhelníku $\mathscr{M}$. Dokažte, že pata aspoň jedné z těchto kolmic padne dovnitř příslušné strany (tedy ne na její prodloužení či do jejího krajního bodu).

O tom, že tvrzení platí pro *jeden* sedmiúhelník $\mathscr{M}$ a *jeden* bod $X \in \mathscr{M}$, svědčí obr. 23a. Dvě paty kolmic tam padnou dovnitř příslušných stran, pět na jejich prodloužení. Přejedete-li očima po celém sedmiúhelníku, jistě dojdete k názoru, že v něm neexistuje bod X, který by tvrzení úlohy vyvracel. Podívejte se však na obr. 23b! Tento příklad ukazuje, že v textu úlohy nelze vypustit předpoklad o *konvexnosti* mnohoúhelníku $\mathscr{M}$. (O takové podmínce matematického tvrzení říkáme, že je *podstatná*.) Domluvme se, že v dalším textu budeme uvažovat pouze konvexní mnohoúhelníky.



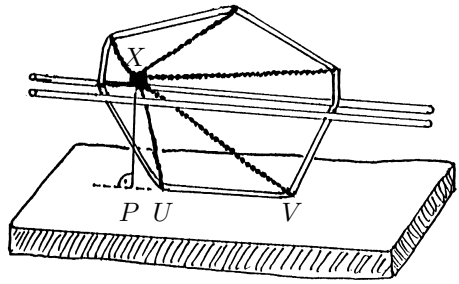
Obr. 23a



Obr. 23b

Zkusíte-li posuzovanou úlohu sami chvíli řešit, zjistíte, v čem je úskalí podobných „obecných“ úloh. Pro libovolný *konkrétní* mnohoúhelník $\mathscr{M}$, který nakreslíme, doslova *vidíme*, že závěr tvrzení platí, ať bod X vybereme v kterékoliv části $\mathscr{M}$. Toto „konkrétní vidění“ příliš nenapovídá, jak tvrzení dokázat pro obecný případ. Přesvědčíme se za chvíli, že úloha má fyzikální „pozadí“, které již vše potřebné prozradí: *dovnitř příslušné strany padne pata té kolmice, která je z konečného počtu všech pat danému bodu X nejblíže* (pokud nejbližší pata není jediná, hodí se libovolná z nich). Matematický důkaz tohoto „objevu“ je snadný: Kdyby zmíněná nejbližší pata P padla *vně* příslušné strany mnohoúhelníku $\mathscr{M}$, platilo by $P \notin \mathscr{M}$, takže v $\mathscr{M}$ by ležela pouze část úsečky XP, tedy některá úsečka XQ (využili jsme konvexnost $\mathscr{M}$, promyslete jak). Bod Q by pak musel ležet na hranici mnohoúhelníku $\mathscr{M}$, byl by proto bodem některé jeho strany UV. Pro patu P' kolmice z bodu X na přímku UV by ale platilo $|XP'| \leqq |XQ| < |XP|$, což by odporovalo tomu, že P je nejbližší pata. (Sami vysvětlete, proč nejbližší pata P nemůže být ani *krajním* bodem příslušné strany.) Důkaz sporem je hotov.

V předchozím odstavci se potvrdila pravda, kterou výzkum v matematice přináší: objevit je často těžší než dokázat. Jak jsme slíbili, ukážeme teď ještě jednou, jak k matematickému objevu může napomoci fyzika. Libovolný mnohoúhelník M vymodelujeme z tenkého pevného drátu (obr. 24), daný bod X uvnitř $\mathscr{M}$ bude zastupovat malé závaží, jehož



Obr. 24

polohu v modelu $\mathscr{M}$ zajistíme několika provázky. Budeme předpokládat, že hmotnosti drátu i provázků jsou zanedbatelné ve srovnání s hmotností závaží. Model se závažím jako na obrázku postavíme kolmo na vodorovnou podložku a proti bočním pádům zajistíme dvěma blízkými tyčemi rovnoběžnými s rovinou modelu. Na obrázku se model opírá o podložku takovou stranou UV mnohoúhelníku $\mathscr{M}$, že se pod vlivem tíhy závaží model začne po podložce kutálet. Geometrický důvod je nasnadě: pata

kolmice P spuštěné z bodu X na opěrnou přímku padne mimo příslušnou stranu UV. (Kdyby platilo $P = U$ nebo $P = V$, mohli bychom rozkutálet model malým vnějším impulsem.) Kutálení modelu však musí po určitém čase skončit, jinak by šlo o zařízení zvané „věčný hybatel“ neboli *perpetuum mobile*, jehož existence odporuje zákonu zachování energie. V konečné klidové poloze už pata P kolmice na opěrnou přímku musí ležet uvnitř příslušné strany UV, a tak je tvrzení naší úlohy fyzikálně dokázáno. Dodejme, že k takovým klidovým polohám patří samozřejmě i ta poloha, kdy má závaží v bodě X nejmenší potenciální energii, tedy nejnižší polohu nad vodorovnou podložkou. To nastane, právě když je pata P (kolmice na opěrnou přímku) bodu X nejblíže. Proto je také kurzívou psaná nápověda z předchozího odstavce projevem toho principu, kterému jsme se v celém příspěvku věnovali.

Literatura:

[1] Š. Honová: *O koblížkovi*. Vydavatelský dům Morava, s.r.o., Ostrava, rok vydání neuveden.

[2] G. Polya: *Mathematics and plausible reasoning, vol. 1, Chapter 9*. Princeton University Press, 1954 (ruský překlad Nauka, 1975).

[3] J. Šimša: *Archimédova statika v geometrii*. Rozhledy mat.-fyz. 74 (1997), 14–24 a 57–64. Viz rovněž tento vzdělávací portál MU.

[4] J. Šimša: *Rotační setrvačnost v geometrii*. Rozhledy mat.-fyz. 74 (1997), 97–109 a 145–158. Viz rovněž tento vzdělávací portál MU.

[5] V. A. Uspenskij: *Некоторые приложения механики к математике*. GIFML, Moskva, 1958.