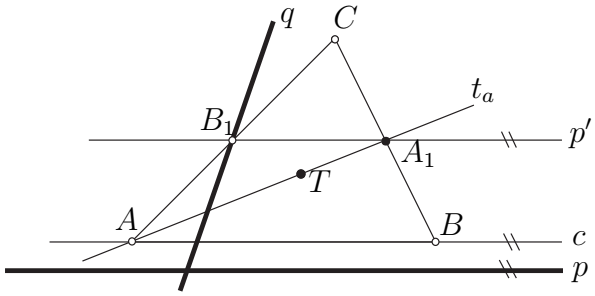
ÚLOHY ANALYTICKÉ GEOMETRIE TROJÚHELNÍKA

Jiří Pecl

Analytická geometrie dnes neodmyslitelně patří k učivu matematiky na středních školách. V tomto příspěvku, zaměřeném na analytickou geometrii v rovině, je čtenářům nabídnuto sedm řešených příkladů o trojúhelnících. V nich mohou studenti uplatnit své znalosti o trojúhelnících a čtyřúhelnících z hodin syntetické geometrie.
Nejprve uvedeme značení v trojúhelníku ABC, které bude v jednotlivých příkladech použito. Kromě obvyklého značení $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ vnitřních úhlů budou A_1, B_1, C_1 značit po řadě středy stran BC, AC, AB, dále pak budou A_0, B_0, C_0 značit paty výšek spuštěných po řadě z vrcholů A, B, C. Méně obvyklé bude, že a, b, c, resp. t_a, t_b, t_c, resp. v_a, v_b, v_c budou značit nikoliv *úsečky*, ale *přímky*, na kterých leží příslušné strany, resp. těžnice, resp. výšky trojúhelníku ABC. Ke každému řešenému příkladu uvádím schématický obrázek, na kterém jsou tučně vyznačeny dané přímky a body v hledaném trojúhelníku.

Příklad 1: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice těžiště $T[1,3]$, středu $A_1[3,4]$ strany BC a víte-li, že strana AB je rovnoběžná s přímkou $p: x+4y=0$ a že střed B_1 strany AC leží na přímce q určené body $X[-5,1],\ Y[-3,3]$.



Řešení: Těžiště dělí těžnici trojúhelníku v poměru 2 : 1, přitom větší část těžnice leží při vrcholu. Proto

$$A = T + 2\overrightarrow{A_1T} = [1,3] + 2(-2,-1) = [-3,1].$$

Střed B_1 strany AC leží na přímce q, jejíž parametrická rovnice je

$$X = [-5,1] + t(1,1),\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Z vlastností středních příček trojúhelníku plyne $A_1B_1 \parallel AB$, proto $A_1B_1 \subset p' \parallel p$, kde p' je přímka jdoucí bodem A_1, takže má obecnou rovnici

$$p': x+4y+k=0\ .$$

Po dosazení souřadnic bodu A_1 do rovnice vyjde $k=-19$. Bodu $B_1[-5+t, 1+t] \in p'$ odpovídá ten parametr t, který splňuje podmínku $(-5+t)+4(1+t)-19=0$, takže $t=4$ a $B_1[-1,5]$.
Nyní již

$$B = T + 2\overrightarrow{B_1T} = [1,3] + 2(2,-2) = [5,-1].$$

Bod B_1 je střed úsečky AC, takže:

$$\left.\begin{aligned} x_{B_1} &= \frac{x_A + x_C}{2} \;\Rightarrow x_C = 2x_{B_1} - x_A = 1, \\ y_{B_1} &= \frac{y_A + y_C}{2} \;\Rightarrow y_C = 2y_{B_1} - y_A = 9. \end{aligned}\right\} \Rightarrow C[1,9]$$

□

Výsledek: $\boxed{A[-3,1],\ B[5,-1],\ C[1,9]}$

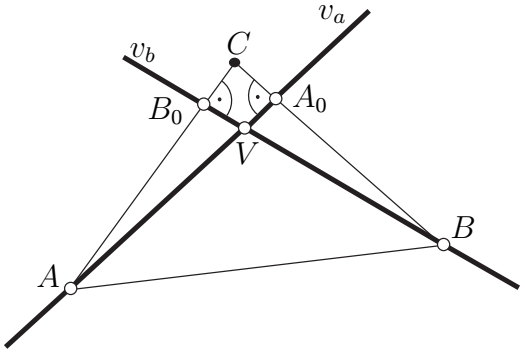
Jiné řešení: Souřadnice vrcholů A a B spočítáme stejně jako v předchozím řešení, avšak souřadnice vrcholu C můžeme vypočítat z obecně platných vzorců pro souřadnice těžiště trojúhelníku:

$$x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$
$$y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Odtud

$$\left.\begin{aligned} x_C &= 3x_T - x_A - x_B = 1 \\ y_C &= 3y_T - x_A - x_B = 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C[1,9]$$

Příklad 2: Vypočtěte souřadnice zbylých dvou vrcholů A, B trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $C[3,6]$, obecnou rovnici přímky $v_b : x + y - 5 = 0$, a parametrickou rovnici přímky $v_a : X = [-2,0] + t(2,1),\ t \in \mathbb{R}$.



Řešení: Vrchol $A[x_A, y_A]$ leží na přímce v_a, proto $x_A = -2+2t$, $y_A = t$ pro vhodné $t \in \mathbb{R}$. Navíc bod A leží na přímce b procházející vrcholem C kolmo k přímce v_b. Normálový vektor $(1,1)$ přímky v_b je směrový vektor přímky b, proto $x_A = 3 + s$, $y_A = 6 + s$ pro vhodné $s \in \mathbb{R}$. Celkem tedy:

$$\begin{aligned} x_A: \quad & -2 + 2t = 3 + s \\ y_A: \quad & t = 6 + s \\ & -2 + 2(6 + s) = 3 + s \\ & s = -7 \qquad \Rightarrow A[x_A, y_A] = [-4,-1] \end{aligned}$$

Z $B \in v_b$ plyne $x_B + y_B - 5 = 0$, navíc bod B leží na přímce a procházející vrcholem C kolmo k přímce v_a. Normálový vektor přímky a je tedy $(2,1)$, a protože $C \in a$, má přímka a obecnou rovnici

$$a : 2x + y - 12 = 0\ .$$

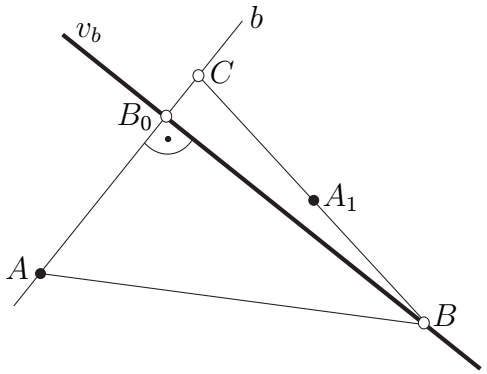
Souřadnice vrcholu B získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rr} v_b \cap a: & x_B + y_B - 5 = 0 \\ & 2x_B + y_B - 12 = 0 \\ \hline & x_B - 7 = 0 \\ & x_B = 7 \quad \Rightarrow y_B = -2 \text{ a } B[7,-2]. \end{array}$$

□

Výsledek: $\boxed{A[-4,-1],\ B[7,-2]}$

Příklad 3: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[2,7]$, obecnou rovnici přímky $v_b : 3x - 2y + 11 = 0$ a střed $A_1[1,3]$ strany BC.



Řešení: Protože $B \in v_b$, platí $3x_B - 2y_B + 11 = 0$, odkud $y_B = \dfrac{3x_B + 11}{2}$. Vrchol C leží na přímce b procházející vrcholem A kolmo k přímce v_b, takže její obecná rovnice je

$$b : 2x + 3y - 25 = 0\ .$$

Souřadnice vrcholu C tedy splňují rovnost $2x_C + 3y_C - 25 = 0$, odkud $x_C = \dfrac{25 - 3y_C}{2}$. Bod A_1 je střed úsečky BC a platí tedy:

$$x_{A_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{x_B + \frac{25-3y_C}{2}}{2}, \quad y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{\frac{3x_B+11}{2} + y_C}{2}$$

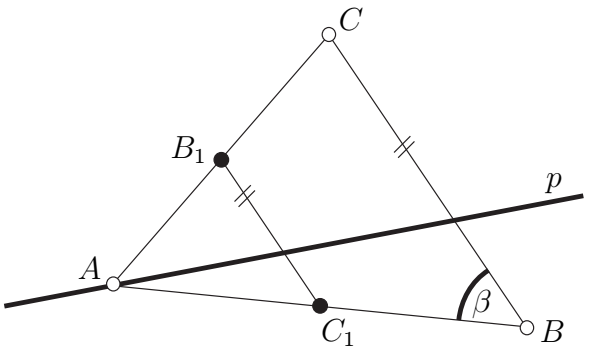
Po úpravě a dosazení dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{r} 2x_B - 3y_C + 21 = 0 \\ 3x_B + 2y_C - 1 = 0 \\ \hline 13x_B + 39 = 0 \\ x_B = -3 \quad \Rightarrow y_C = 5 \end{array}$$

Je tedy $y_B = \dfrac{3x_B + 11}{2} = 1$, resp. $x_C = \dfrac{25 - 3y_C}{2} = 5$. □

Výsledek: $\boxed{B[-3,1],\ C[5,5]}$

Příklad 4: Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice středů stran $B_1[0,3]$ a $C_1[1,0]$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$ ($\beta \doteq 53°07'$) a víte-li, že $A \in p : x - y + 3 = 0$.



Řešení: Protože $A[x_A, y_A] \in p$, platí $x_A - y_A + 3 = 0$, odkud $x_A = y_A - 3$. Víme, že $B_1C_1 \parallel CB$, a že tedy $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle B_1C_1A| = \beta$. Pak ovšem:

$$\frac{\overrightarrow{C_1B_1} \cdot \overrightarrow{C_1A}}{\left|\overrightarrow{C_1B_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{C_1A}\right|} = \cos\beta$$

$$\frac{(-1,3)\cdot(x_A-1,y_A)}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{(x_A-1)^2+y_A^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{(-1,3)\cdot(y_A-4,y_A)}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{(y_A-4)^2+y_A^2}} = \frac{3}{5}$$

$$5\cdot(2y_A+4) = 3\sqrt{10}\cdot\sqrt{(y_A-4)^2+y_A^2}$$

Nyní použijeme dúsledkovou úpravu – obě strany rovnice umocníme. Po dalších úpravách dostaneme kvadratickou rovnici

$$y_A^2 - 14y_A + 13 = 0,$$

ze které plyne $y_A = 1$ (pak $x_A = -2$) nebo $y_A = 13$ (pak $x_A = 10$). Dosazením se přesvědčíme, že v obou případech skutečně platí $\cos\beta = \frac{3}{5}$. Vyhovují tedy dva vrcholy $A[-2,1]$ a $A'[10,13]$.
Protože C_1 je střed úsečky AB, dále platí:

$$B = A + 2\vec{AC_1} = [-2,1] + 2(3,-1) = [4,-1], \text{ resp.}$$
$$B' = A' + 2\vec{A'C_1} = [10,13] + 2(-9,-13) = [-8,-13].$$

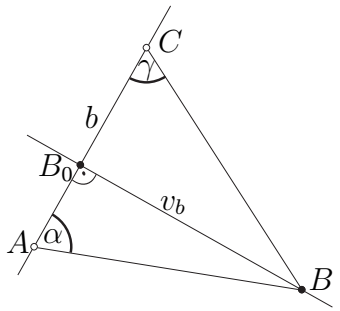
Protože bod B_1 je střed úsečky AC, podobně platí:

$$C = A + 2\vec{AB_1} = [-2,1] + 2(2,2) = [2,5], \text{ resp.}$$
$$C' = A' + 2\vec{A'B_1} = [10,13] + 2(-10,-10) = [-10,-7].$$

□

Výsledek: $A[-2,1]$, $B[4,-1]$, $C[2,5]$, resp. $A'[10,13]$, $B'[-8,-13]$, $C'[-10,-7]$

Příklad 5: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů A, C trojúhelníku ABC, jestliže jsou dány souřadnice vrcholu $B[8,1]$ a paty výšky $B_0[2,4]$, úhel $\gamma = 45°$ a $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ ($\alpha \doteq 56°19'$).



Řešení: Body B, B_0 leží na přímce v_b, je proto $\overrightarrow{BB_0} = (-6,3) \parallel (2,-1)$ její směrový vektor. Hledané vrcholy A, C leží na přímce b, která prochází bodem $B_0[2,4]$ kolmo k přímce v_b, takže její obecná rovnice je

$$b : 2x - y = 0 \ .$$

Platí tedy $2x_A - y_A = 0$, odkud $y_A = 2x_A$, resp. $2x_C - y_C = 0$, odkud $y_C = 2x_C$.
Podle zadání $\alpha < 90°$, platí tedy $|\sphericalangle BAB_0| = \alpha$:

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_0}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB_0}\right|} = \cos\alpha$$

$$\frac{(8-x_A, 1-2x_A)\cdot(2-x_A, 4-2x_A)}{\sqrt{(8-x_A)^2+(1-2x_A)^2}\cdot\sqrt{(2-x_A)^2+(4-2x_A)^2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Tuto rovnici řešíme obdobně jako v příkladu 4 postupem zahrnujícím umocnění. Dostaneme kvadratickou rovnici s kořeny $x_A = 0$ a $x_A = 4$. Pro $x_A = 0$ je $y_A = 0$, takže je $A[0,0]$, resp. pro $x_A = 4$ je $y_A = 8$ a je tedy $A'[4,8]$.
Protože je $\gamma < 90°$, platí $|\sphericalangle BCB_0| = \gamma$, takže:

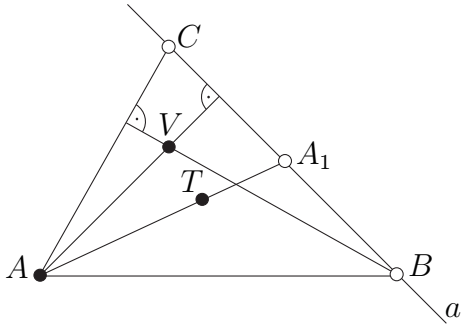
$$\frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB_0}}{\left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB_0}\right|} = \cos\gamma$$

$$\frac{(8-x_C, 1-2x_C)\cdot(2-x_C, 4-2x_C)}{\sqrt{(8-x_C)^2+(1-2x_C)^2}\cdot\sqrt{(2-x_C)^2+(4-2x_C)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Řešením této rovnice jsou $x_C = 5$ a $x_C = -1$. Pro $x_C = 5$ je $y_C = 10$, proto $C[5,10]$, resp. pro $x_C = -1$ je $y_C = -2$ a $C'[-1,-2]$.
Na první pohled se zdá, že řešeními jsou trojúhelníky ABC, ABC', $A'BC$ a $A'BC'$. Protože však $\alpha < 90°$ a $\gamma < 90°$, je pata výšky B_0 spuštěná z vrcholu B vnitřní bod úsečky AC. Je-li tedy $A[0,0]$, je B_0 vnitřní bod úsečky AC pouze pro $C[5,10]$, resp. je-li $A[4,8]$, je B_0 vnitřní bod úsečky AC pouze pro $C[-1,-2]$. □

Výsledek: $\boxed{A[0,0],\ C[5,10],\ \text{resp. } A'[4,8],\ C'[-1,-2]}$

Příklad 6: Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-3,3]$, průsečík výšek $V[3,3]$ a těžiště $T[5,5]$.



Řešení: Nejprve z bodů A, T určíme střed A_1 strany BC:

$$A_1 = A + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{AT} = [-3,3] + \tfrac{3}{2}(8,2) = [9,6]$$

Přímka a prochází bodem A_1 a její normálový vektor je $\overrightarrow{AV} = (6,0) \parallel (1,0)$. Je tedy

$$a : X = [9,6] + t \cdot (0,1),\ t \in \mathbb{R}\ .$$

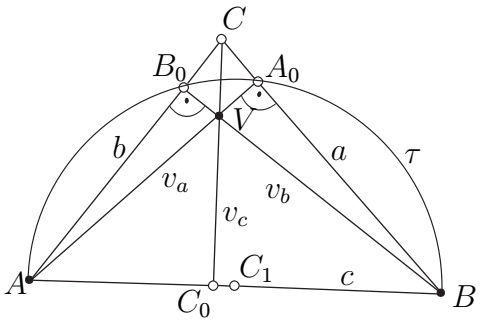
Protože je A_1 střed strany BC, platí $B[9, 6+t_0]$, $C[9, 6-t_0]$ pro některé $t_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Z podmínky $\overrightarrow{BV} \perp \overrightarrow{AC}$ dostaneme:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ (-6, -3-t_0) \cdot (12, 3-t_0) &= 0 \\ -72 - 9 + t_0^2 &= 0 \\ t_0^2 &= 81 \\ t_0 &= \pm 9 \end{aligned}$$

Pro $t_0 = 9$ je $B[9,15]$ a $C[9,-3]$, resp. pro $t_0 = -9$ je $B'[9,-3]$ a $C'[9,15]$. □

Výsledek: $\boxed{B[9,15],\ C[9,-3],\ \text{resp. } B'[9,-3],\ C'[9,15]}$

Příklad 7: Vypočtěte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecnou rovnici přímky $c : x - 8y + 2 = 0$ a souřadnice pat výšek $A_0\left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$, $B_0[0,4]$.



Řešení: Příklad vyřešíme metodou, která je spíše konstrukční: z bodů A_0, B_0 je úsečka AB vidět pod úhlem 90°, proto A_0, B_0 leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem AB. Její střed S ($\equiv C_1$) určíme jako průsečík přímky c s osou o úsečky A_0B_0. Střed O

úsečky A_0B_0 má souřadnice $\left[\frac{x_{A_0}+x_{B_0}}{2}, \frac{y_{A_0}+y_{B_0}}{2}\right] = \left[\frac{5}{4}, \frac{17}{4}\right]$, $\overrightarrow{A_0B_0} = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) \parallel (5,1)$, takže obecná rovnice přímky o je

$$o : 5x + y - \frac{21}{2} = 0 \ .$$

Nyní již souřadnice $[x_S, y_S]$ bodu S získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} o \cap c : \qquad 5x_S + y_S - \tfrac{21}{2} &= 0 \\ x_S - 8y_S + 2 &= 0 \quad \Rightarrow x_S = 8y_S - 2 \\ 5(8y_S - 2) + y_S - \tfrac{21}{2} &= 0 \\ 41y_S - \tfrac{41}{2} &= 0 \\ y_S = \tfrac{1}{2} \quad &\Rightarrow x_S = 2 \ \text{ a } S\left[2, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

Poloměr r kružnice τ je $|SA_0| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+16} = \sqrt{\frac{65}{4}}$, a je tedy

$$\tau : (x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4} \ .$$

Nyní najdeme souřadnice $[x, y]$ průsečíků kružnice τ s přímkou c - budou to hledané vrcholy A a B. Protože $c : x = 8y - 2$, po dosazení do rovnice τ dostaneme:

$$\begin{aligned} (8y - 2 - 2)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 &= \tfrac{65}{4} \\ 64y^2 - 64y + 16 + y^2 - y + \tfrac{1}{4} &= \tfrac{65}{4} \\ 65y^2 - 65 &= 0 \\ y(y-1) &= 0 \end{aligned}$$

Odtud $y = 0$ nebo $y = 1$, čemuž odpovídá $x = -2$ resp. $x = 6$. Hledané vrcholy tedy jsou $A[-2,0]$ a $B[6,1]$, resp. $A'[6,1]$ a $B'[-2,0]$.
Vrchol $C[x_C, y_C]$ určíme jako průsečík přímek a, b. Po dosazení souřadnic vrcholu A, resp. A' do rovnice přímky a a po úpravě je

$$a : x + y - 7 = 0 \ ,$$

resp.

$$a' : x - y + 2 = 0 \ .$$

Zbývá nám určit přímku b. $A, B_0 \in b$ a $\overrightarrow{AB_0} = (2,4)$, resp. $A', B_0 \in b'$ a $\overrightarrow{A'B_0} = (-6,3)$, takže

$$b : X = [-2,0] + t(2,4), \ t \in \mathbb{R} \ ,$$

resp.

$$b' : X = [6,1] + t'(-6,3), \ t' \in \mathbb{R} \ .$$

$C \in a \cap b$: $\quad (-2+2t) + 4t - 7 = 0 \ \Rightarrow t = \frac{3}{2}$ a $C[1,6]$
$C' \in a' \cap b'$: $\ (6-6t') - (1+3t') + 2 = 0 \ \Rightarrow t' = \frac{7}{9}$ a $C'\left[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right]$. □

Výsledek: $\boxed{A[-2,0],\ B[6,1],\ C[1,6], \text{ resp. } A'[6,1],\ B'[-2,0],\ C'\left[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right]}$

Jiné řešení: Na přímce c zvolme libovolný bod, např. $X\left[2,\frac{1}{2}\right]$. Směrový vektor přímky c je $(8,1)$ a její parametrické vyjádření je

$$c: X = \left[2,\tfrac{1}{2}\right] + t(8,1), t \in \mathbb{R}\ .$$

Z $A, B \in c$ máme $A\left[2+8t_1, \frac{1}{2}+t_1\right]$, $B\left[2+8t_2, \frac{1}{2}+t_2\right]$. Dále $\overrightarrow{BA_0} \perp \overrightarrow{AA_0}$ a $\overrightarrow{AB_0} \perp \overrightarrow{BB_0}$ odkud $\overrightarrow{BA_0} \cdot \overrightarrow{AA_0} = 0 = \overrightarrow{AB_0} \cdot \overrightarrow{BB_0}$. Nejprve využijeme pouze rovnost obou skalárních součinů:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{2}-8t_2, 4-t_2\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}-8t_1, 4-t_1\right) &= \left(-2-8t_1, \tfrac{7}{2}-t_1\right) \cdot \left(-2-8t_2, \tfrac{7}{2}-t_2\right) \\
-8t_1 - 8t_2 + 65t_1t_2 + \tfrac{65}{4} &= \tfrac{25}{2}t_1 + \tfrac{25}{2}t_2 + 65t_1t_2 + \tfrac{65}{4} \\
\tfrac{41}{2}t_1 + \tfrac{41}{2}t_2 &= 0 \\
t_2 &= -\,t_1
\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice $\overrightarrow{AB_0} \cdot \overrightarrow{BB_0} = 0$ dostaneme po úpravě rovnici $-65t_1^2 + \frac{65}{4} = 0$, odkud $t_1 = \pm\frac{1}{2}$. Pro $t_1 = -\frac{1}{2}$ je $t_2 = \frac{1}{2}$, a tedy $A[-2,0]$, $B[6,1]$, resp. pro $t_1 = \frac{1}{2}$ je $t_2 = -\frac{1}{2}$ a $A'[6,1]$, $B'[-2,0]$. Souřadnice vrcholu C, resp. C' bychom opět spočítali jako v prvním řešení.

Literatura

[1] Kočandrle M., Boček L., *Matematika pro gymnázia - Analytická geometrie*, Prometheus, Praha 2002

[2] Bušek I., *Sbírka úloh pro gymnázia - Analytická geometrie*, Prometheus, Praha 2002

[3] Petáková J., *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Prometheus, Praha 2003

[4] Pecl J., *Určování trojúheníků analytickými výpočty*, diplomová práce, PřF MU v Brně 2005