INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nekonečno v matematické přípravě učitelů matematiky na druhém stupni základní školy

Jaroslav Beránek

Pedagogická fakulta MU

beranek@ped.muni.cz

Pojem nekonečna (aktuálního i potenciálního) patří k základním pojmům v matematice. Proto je problematice nekonečna a jeho chápání u studentů, budoucích učitelů matematiky na 2. stupni ZŠ, věnován tento příspěvek. Důvodem jeho zařazení je mj. to, že často jediná vědomost studentů o nekonečných množinách je zredukována pouze na znalost definice nekonečné množiny („Nekonečná množina je ekvivalentní s některou svou vlastní podmnožinou“), a to mnohdy jen formální. Zkreslené představy o nekonečnu a nekonečných souborech u studentů mohou pak následně u jejich žáků vyvolat různé úvahy o nadpřirozenu apod., což pak ztěžuje na vyšších stupních škol správné pochopení těch pojmů, které jsou na nekonečných procesech založeny (nekonečné řady, limitní procesy, určitý integrál, teorie míry, konstrukce reálných čísel apod.). Proto ty znalosti o nekonečnu, které považují dnešní matematici při studiu odborné literatury a svém vědeckém bádání za důležité a samozřejmé, je nutno s budoucími učiteli důkladně prodiskutovat. Pro úplnost pouze připomeňme (viz [2]), že matematické nekonečno je jednotou svých dvou protikladných forem - potenciálního a aktuálního nekonečna. Potenciální nekonečno znamená neustálé překonávání libovolné hranice, zatímco aktuální nekonečno je výsledkem abstrakce absolutní uskutečnitelnosti. Jak ukážeme v dalším textu, pojetí aktuálního nekonečna vede k řadě příkladů, na první pohled zcela paradoxních. Aktuální nekonečno má rovněž značný význam v teorii množin. V praxi nejde samozřejmě o zařazení problematiky nekonečna a nekonečných souborů do obsahu výuky matematiky na 2. stupni ZŠ, není ale ani možné se těmto otázkám vyhýbat. Nejde přitom ani tak o hluboké odborné znalosti kardinální a ordinální aritmetiky (např. diskuse o hypotéze kontinua), jako o získání potřebného nadhledu a souvislostí.

Všimněme si ještě velmi krátce možností chápání pojmu nekonečno u žáků ZŠ. Jejich výzkumem se zabývala řada matematiků, u nás v poslední době např. P. Eisenmann ([3], [4], [5]) a D. Jirotková ([7]). Existuje výzkum, realizovaný P. Eisenmannem, týkající se vývoje představ žáků základních škol o mohutnosti a ohraničenosti množin v geometrii a vývoje představ žáků o uspořádání množiny přirozených, celých a racionálních čísel. Výsledky výzkumu lze nalézt v [3] a [4]. Nebudeme je proto uvádět, poznamenáme pouze z výzkumu plynoucí fakt, že žáci chápají nekonečno spíše potenciálně (Eisenmann [5], s. 92), přestože podle Hejného (Hejný [6], s. 257) se žákům předkládá fenomén nekonečna převážně v aktualizované podobě (přímka, rovina, číselné obory). Žákům je přitom potenciální přístup bližší, je ale málo rozvíjený.

Jak již bylo naznačeno, cílem příspěvku je uvést řadu příkladů, které je vhodné řešit s budoucími učiteli matematiky. Zejména se jedná o správné pochopení aktuálního nekonečna, jehož uznání přineslo v minulosti řadu zajímavých matematických výsledků, které lze pomocí „klasického“ úsudku jen těžko pochopit. Ukážeme některé z nich (další např. [8], [9]).

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Úvodní problém je „klasický“ (viz např. [9]). Jedná se o „problém ubytování nově příchozího hosta v plně obsazeném hotelu o nekonečně mnoha pokojích“.

Nechť existuje hotel, který má nekonečný počet pokojů a je plně obsazen. Přijíždí další host a žádá o nocleh. Při konečném počtu pokojů je samozřejmě odkázán na jiné ubytovací zařízení. Počet pokojů je však nekonečný. Proto je možné nově příchozího hosta ubytovat v pokoji č. 1, hosta z pokoje č. 1 přesunout do pokoje č. 2, hosta z pokoje č. 2 přesunout do pokoje č. 3, atd. Všichni hosté budou ubytováni včetně nově příchozího hosta.

Příkladem, který nechybí snad v žádné učebnici matematické analýzy, je harmonická řada. Tato nekonečná řada slouží jako protipříklad k tomu že nelze obrátit tuto matematickou větu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je konvergentní} \Rightarrow a_n \to 0.$$

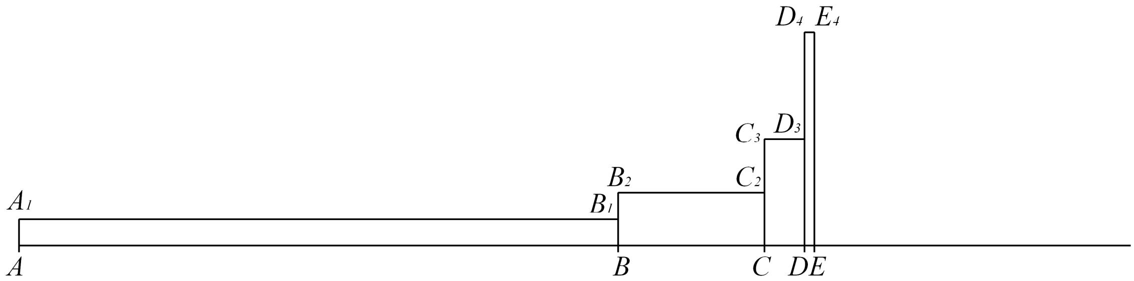
Definice harmonické řady je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Přestože se n-tý člen blíží k nule, je tato řada divergentní. Ukážeme jednoduchý důkaz, přístupný i středoškolákům (viz [8]). Počínaje od třetího členu seskupíme členy řady postupně po $2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}$ členech:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+\ldots$$

Součet v každé závorce je větší než $\frac{1}{2}$. Označíme-li n-tý částečný součet harmonické řady jako S_n, dostaneme $S_{2^k} > k \cdot \frac{1}{2}$. To znamená že řada diverguje. Uvedený důkaz pochází od Nicole Oresmeho (1323-1382), viz [8]. Harmonická řada diverguje ovšem velmi pomalu. Např. $S_{1000} \doteq 7{,}485$, $S_{10^6} \doteq 14{,}393$. V souvislosti s harmonickou řadou je pro studenty zajímavé si uvědomit, že „podobně“ definovaná nekonečná geometrická řada s prvním členem 1, pro jejíž kvocient q platí $-1 < q < 1$, je konvergentní a dokonce existuje explicitní vzorec pro její součet. Připomeňme ještě další nekonečnou řadu tvaru $1-1+1-1+1-1+\ldots$, která není konvergentní ani divergentní. Její součet neexistuje, neboť vhodným přerovnáním lze dostat jako součet této řady různá čísla, např. $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$, ale $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$. Připomeňme jen, že řešení součtu nekonečných řad je umožněno uznáním aktuálního nekonečna, kdy na nekonečnou řadu „pohlížíme“ jako na celek.

Od N. Oresmeho pochází i další příklad (viz [8]), využívající konvergentní geometrickou řadu. Obsahem tohoto příkladu je konstrukce geometrického obrazce, který má nekonečný obvod, ale konečný obsah, což je opět pro laickou představu obtížné. Vytvoříme tedy obrazec utvořený z nekonečně mnoha pravoúhelníků, jejichž délky vodorovných stran se zmenšují v poměru $4:1$ a délky jejich svislých stran se zvětšují v poměru $2:1$. Tyto pravoúhelníky se nepřekrývají, jejich vodorovné strany leží na jedné polopřímce a každé dva sousední mají společné svislé strany rovněž na jedné polopřímce. Pro lepší představu označíme jejich vrcholy a pravoúhelníky popíšeme: První obdélník ABA_1B_1 má rozměry 48×1, druhý obdélník BCB_2C_2 má rozměry 12×2, třetí CDC_3D_3 rozměry 3×4, čtvrtý DED_4E_4 rozměry $0{,}75 \times 8$, atd., přičemž body $A, B, C, D, E, \ldots$ leží na jedné přímce a délka úsečky AB je 48, délka úsečky BC je 12, délka úsečky CD je 3, délka úsečky DE je $0{,}75$, atd.

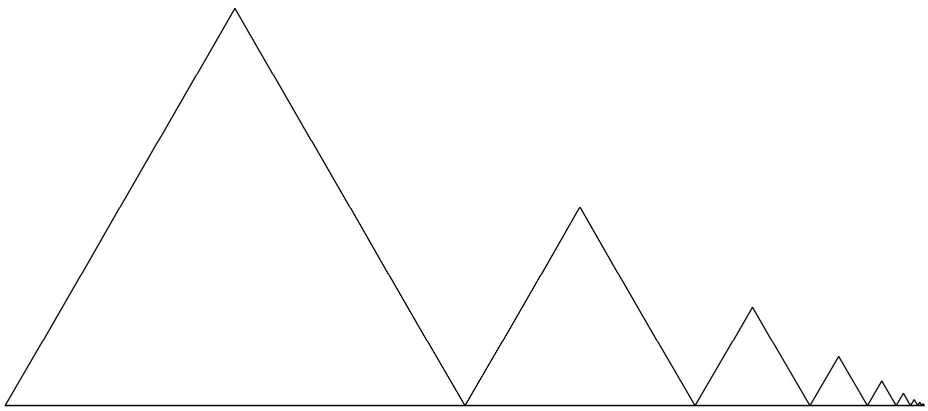
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 1

Obsah celého tohoto geometrického útvaru lze určit jako součet obsahů nekonečně mnoha pravoúhelníků takto: $48 + 24 + 12 + 6 + ...$, což je nekonečná geometrická řada se součtem $s = 96$. Popsaný útvar tedy má skutečně nekonečný obvod a konečný obsah. Pro pochopení této úlohy je opět nutné uznání aktuálního nekonečna (daný útvar existuje pouze v myšlenkách - nikdo ho nikdy nemůže zkonstruovat).

Mezi další vhodné příklady patří ukázka reálné funkce, která má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nekonečně mnoho bodů maxima a minima. Poznamenejme, že opět u studentů nejde a přesný formální popis, ale spíše o populární formu pochopení. Stručně tedy popíšeme populární formou graf takové funkce f (viz [9]). Rozpůlíme daný interval a nad jeho levou polovinou sestrojíme rovnostranný trojúhelník. Pravou polovinu opět rozdělíme na poloviny a nad intervalem $\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\rangle$ sestrojíme další rovnostranný trojúhelník. Popsaný postup opakujeme nekonečněkrát, nakonec dodefinujeme $f(1) = 0$. Grafem hledané funkce f bude sjednocení hranic všech těchto nekonečně mnoha rovnostranných trojúhelníků, od kterého je odečtena úsečka zobrazující interval $\langle 0, 1\rangle$. Uvažovaným bodem, v jehož okolí existuje nekonečně mnoho bodů maxima a minima, je bod $x = 1$.



Obr.2

Užitečným cvičením je nyní vyjádřit analyticky funkční předpis této funkce. Na intervalu $I_1 = \langle 0, \frac{1}{4}\rangle$ platí $y = \sqrt{3}\,x$, na $I_2 = \langle \frac{1}{4}, \frac{2}{4}\rangle$ platí $y = -\sqrt{3}\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}$, pro $I_3 = \langle \frac{4}{8}, \frac{5}{8}\rangle$ platí

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

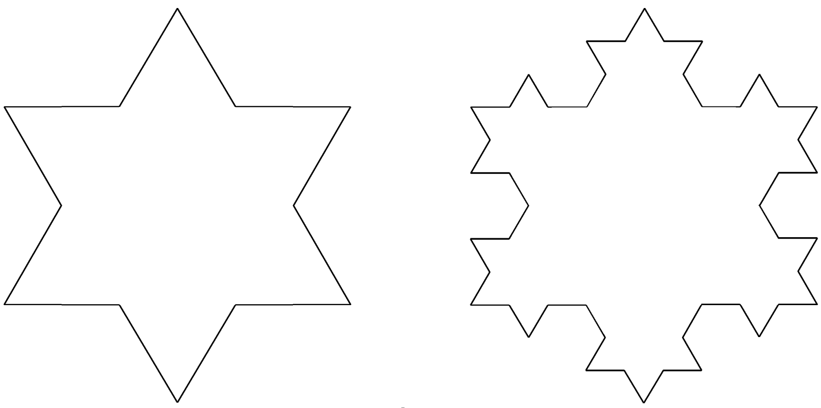
Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost Jihomoravský kraj
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$y = \sqrt{3}\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}$, pro $I_4 = \langle \frac{5}{8}, \frac{6}{8} \rangle$ je $y = -\sqrt{3}\,x + \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Obecně pro $n = 2,3,4, \dots$ v intervalu $\langle \frac{2^n - 4}{2^n}, \frac{2^n - 3}{2^n} \rangle$ platí $y = \sqrt{3}\,x + \frac{4 - 2^n}{2^n}\sqrt{3}$, v intervalu $\langle \frac{2^n - 3}{2^n}, \frac{2^n - 2}{2^n} \rangle$ platí $y = -\sqrt{3}\,x + \frac{2^n - 2}{2^n}\sqrt{3}$.

Další, ještě podivuhodnější množinu, sestrojil G. Cantor, po kterém se tato množina nazývá Cantorova, někdy též Cantorovo diskontinuum (opět viz [9]). Na rozdíl od předchozí funkce, která obsahovala pouze jeden bod intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, v jehož okolí existuje nekonečně mnoho maxim a minim ($x = 1$), obsahuje Cantorova množina na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ nekonečně mnoho takovýchto bodů. Přesnou definici Cantorovy množiny nebudeme uvádět (viz [9]).

Dalším z problémů historického vývoje byly konstrukce křivek, které nemají nikde tečnu. Jeden takový příklad pochází od holandského matematika van der Waerdena (viz [9]). Jedná se o uzavřenou lomenou čáru, která má vrchol v každém bodě. Výchozím prvkem konstrukce je rovnostranný trojúhelník. Každou jeho stranu rozdělíme na tři stejné části a nad středními částmi sestrojíme nové rovnostranné trojúhelníky, všechny ve vnější oblasti určené výchozím trojúhelníkem. Tím vznikne šesticípá hvězda. Každou ze shodných dvanácti stran této hvězdy nyní opět rozdělíme na tři stejné části a ve vnější oblasti hvězdy nad středními částmi sestrojíme další rovnostranné trojúhelníky. Opakujeme-li popsaný proces dělení stran a sestrojování rovnostranných trojúhelníků do nekonečna (úvaha opět vyžaduje uznání aktuálního nekonečna), dostaneme lomenou čáru, která má v každém bodě vrchol.



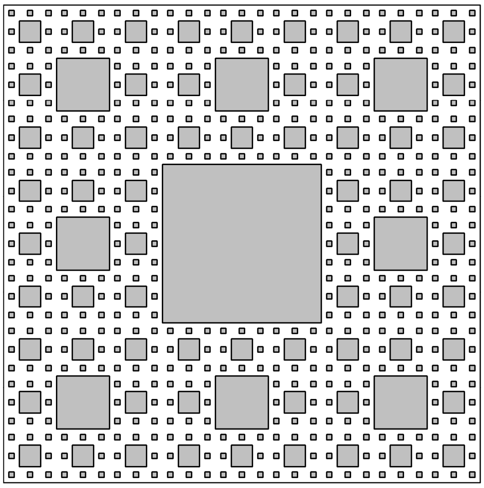
Obr.3

Přehled zajímavých příkladů (kterých je samozřejmě velké množství a příspěvek obsahuje pouze výběr) zakončíme příkladem geometrického útvaru, který má konečný obvod, ale nulový obsah, přestože obsahuje nekonečně mnoho vnitřních bodů. Jedná se o tzv. Sierpińského koberec (viz [9]). Jeho konstrukci zahájíme čtvercem o délce strany rovné 1 (volba jednotky není podstatná). Všechny čtyři jeho strany rozdělíme na třetiny a sestrojíme příčky rovnoběžné se stranami v dělících bodech; tyto příčky rozdělí čtverec na devět shodných čtverců. Nyní vyjmeme vnitřek středního čtverce (žádná jeho strana neleží na stranách původního čtverce). Dále rozdělíme stejným způsobem každý ze zbylých osmi čtverců na devět shodných menších čtverců a z každého vyjmeme vnitřek střední části (všechny hranice čtverců při odstraňování ponecháváme). Původní čtverec nyní obsahuje 64

Materiál byl zpracován v rámci projektu "Systémová podpora trvalého profesního rozvoje (CPD) pedagogických pracovníků propojením pedagogické fakulty se školami na Jižní Moravě – **EDUCOLAND**"

Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

čtverců, jejichž obsah je roven $\frac{1}{81}$. Každý z těchto 64 čtverců stejným způsobem rozdělíme na devět částí a vyjmeme vnitřek střední části. Takto pokračujeme „do nekonečna“. Uznáme-li aktuální nekonečno, můžeme si položit otázku, jak bude „vypadat“ výsledný útvar a jaký bude jeho obsah. Popis vzniklého geometrického útvaru (jehož obvod je roven obvodu výchozího čtverce, tedy čtyři) je výstižně popsán v publikaci N. J. Vilenkina [9], s. 86: „Tento obrazec je podobný tkanině utkané šíleným tkalcem. Podél i napříč se táhnou nitě osnovy a útku a splétají se ve velmi symetrické a krásné vzory. Ale látka, kterou tak dostaneme, je velmi děravá - není v ní ani jeden souvislý kousek plochy, i z toho nejmenšího čtverečku byla vyjmuta střední část. A není vůbec zřejmé, čím tento koberec je - zda čarou nebo plochou. Na jedné straně neobsahuje ani jednu souvislou plošku a těžko tedy může být plochou, ale na druhé straně jsou jeho nitky setkány v tak složitý vzor, že těžko někdo řekne, že Sierpińského koberec je čára.“



Obr. 4

Jako doklad neobvyklosti vzniklého útvaru odvodíme velikost jeho obsahu. Výchozí čtverec má obsah 1. Po prvním kroku je obsah roven $\frac{8}{9}$. Po druhém kroku je obsah roven $\frac{64}{81}$ = $\left(\frac{8}{9}\right)^2$, ve třetím kroku již jen $\frac{512}{729}$ = $\left(\frac{8}{9}\right)^3$. Obecně platí, že po n-tém kroku je obsah roven $\left(\frac{8}{9}\right)^n$. Provedeme-li postup nekonečněkrát, vypočítáme obsah jako limitu $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n$, která je rovna nule. Obsah Sierpińského koberce je tedy skutečně nula.

Aby nevzniknul mylný dojem, že uznání aktuálního nekonečna vedlo v historii matematiky pouze ke zkoumání problémů pro „zábavu“, jak se mohou jevit některé z popsaných příkladů, uvedeme nyní populární formou tři situace, kdy je uznání aktuálního nekonečna nutné při výuce budoucích učitelů matematiky na ZŠ. V aritmetice se jedná o teorii kardinálních a ordinálních čísel. Např. při zavádění kardinálních čísel vycházíme ze systému všech konečných množin, na kterém je definována jistá ekvivalence. Bez uznání aktuálního nekonečna bychom žádný takový systém uvažovat nemohli. V geometrii se jedná o Jordanovu teorii míry. Při zavádění obsahu měřitelného rovinného útvaru je definováno jádro a obal tohoto útvaru, přičemž postupným zjemňováním sítě tvoříme rostoucí posloupnost jader a klesající posloupnost obalů daného útvaru. Blíží-li se délka strany čtverců sítě nule, je limita obou uvedených posloupností tatáž a je rovna míře daného rovinného útvaru (je-li měřitelný). Kdybychom neuznali aktuální nekonečno, nebylo by možné danou limitu určit a tím by nebylo možné definovat míru rovinného útvaru. Další, ve škole běžné, užití aktuálního nekonečna je při konstrukci iracionálních čísel, kdy je každé iracionální číslo postupně aproximováno zleva a zprava, přičemž dolní aproximace tvoří rostoucí posloupnost a horní aproximace klesající posloupnost. Iracionální číslo je pak společnou limitou obou těchto posloupností (např. pro číslo e platí pro každé $n \in \boldsymbol{N}$, $n \neq 0$, nerovnosti

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}).$$

Literatura

1. BERÁNEK, J. *Několik poznámek k pojetí nekonečna ve vyučování matematice*. In Sborník příspěvků ze XXIII. vědeckého kolokvia. 1. vyd. Brno: Univerzita Obrany, 2005. od s. CD-ROM, 5 s. ISBN 80-85960-92-3.
2. DRÁBEK, J. *Světonázorové problémy v matematice - II. díl.* 1. vyd. Plzeň: Pedagogická fakulta v Plzni, 1985, 184 s. ISBN 59-081-85.
3. EISENMANN, P. *Fenomén přímky a kružnice ve výuce matematiky na základní škole.* In: Sborník příspěvků z mezinárodní vědecké konference - Matematika v príprave učitelov 1. stupňa základnej školy. 1. vyd. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela, 2001. ISBN 80-8055-519-2.
4. EISENMANN, P. *Představy žáků o nekonečnu.* In: Sborník příspěvků ze semináře Dva dny s didaktikou matematiky 2002, PdF UK Praha, 2002, ISBN 80-7290-143-5.
5. EISENMANN, P. *Dají se spočítat? Představy žáků a jejich učitelů o nekonečnu*. In: Od činnosti k poznatku. Plzeň: Západočeská univerzita, 2003. od s. 91-94, 4 s. ISBN 80-7082-955-9.
6. HEJNÝ, M. *Teória vyučovania matematiky.* 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. 554 s. ISBN 80-08-01344-3.
7. JIROTKOVÁ, D. *Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky PdF UK.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 43 (1998), s. 326-334, ISSN 0032-2423.
8. KONFOROVIČ, A. G. *Významné matematické úlohy*. 1.vyd. Praha: SPN, 1989, 208 s. ISBN 80-04-21848-2.
9. VILENKIN, N. J. *Neznámý svět nekonečných množin.* 1. vyd. Praha: SNTL, 1971, 115 s. ISBN 04-322-71.