

Podobnost trojúhelníků

Radek Kratochvíl

ZŠ Lysice

skola@zs.lysice.cz

Zadání pro zpracování úkolu:

Na konkrétním příkladě učiva ukázat, jak se změnily strategie učení, popsat metodický postup výuky a poukázat na rozvoj klíčových kompetencí žáka dříve a nyní

Anotace:

Ve své práci jsem se zaměřil na dvojí zpracování tématu učiva z matematiky pro devátý ročník, a to podobnost trojúhelníků. V práci je popsán stručně postup, který jsem při výuce používal ve své dosavadní praxi. Po něm následuje postup, který volím dnes, s uvedením jednoho konkrétního příkladu, na němž lze demonstrovat rozvoj klíčových kompetencí u žáků. V tomto školním roce učím v devátém ročníku třetí „výkonnostní“ skupinu, což znamená nutnost většího procvičování každé látky, nutnost zajímavějšího výkladu, procvičování, a proto jakékoli zpestření klasické výuky je i žáky přijímáno velmi pozitivně.

Autor:

Mgr. Radek Kratochvil, učitel M na ZŠ Lysice

Téma : Podobnost trojúhelníků (dříve)

Cíl: naučit žáky učivo podobnost trojúhelníků a dokázat je využívat v praktickém životě

Metodický postup: učivo bývalo žákům vysvětleno dle učebnice, následovaly příklady na procvičení ve třídě, výuka byla frontální postavená na výkladu učitele, minimální diskuzi se žáky.

1. Výklad učitele:

S využitím učebnice:

Velmi často se setkáváme s podobností. Podobné jsou fotografie a její zvětšení, filmový obrázek a jeho obraz na plátně či obrazovce televizoru. S podobností se setkáváte i ve škole. Učitel rýsuje obrazec na tabuli (nebo na ni kreslí nějaký obrázek) a vy kreslíte podobný obrazec (obrázek) do svého sešitu.

Každému bodu A v rovině tabule přísluší jediný bod A' v rovině sešitu a naopak každému bodu M' v rovině sešitu přísluší jediný bod M v rovině tabule. Body a obrazce (obrázky) na tabuli se nazývají **vzory** a příslušné útvary v sešitě **obrazy**.

Mnoho útvarů v rovině lze složit z trojúhelníků nebo naopak rozložit na trojúhelníky. Budeme se proto zabývat podobností trojúhelníků.

Trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ jsou *podobné*, jestliže pro délky jejich stran platí:

$$a' = k \cdot a, b' = k \cdot b, c' = k \cdot c, \text{ kde } k > 0.$$

Číslo k se nazývá *poměr podobnosti*.

Podobnost trojúhelníků ABC , $A'B'C'$ krátce zapisujeme

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Přitom dbáme, abychom vrcholy trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ zapisovali v pořadí tak, jak si v podobnosti odpovídají. Značka $\sim$ je odvozena z ležatého písmena S, jímž začíná latinské slovo *similis* (podobný).

Je-li $k > 1$, nazývá se podobnost **zvětšení**,

je-li $0 < k < 1$, nazývá se podobnost **zmenšení**,

je-li $k = 1$, jsou oba trojúhelníky shodné; shodnost je tedy zvláštním případem podobnosti.

V další fázi výuky následuje výklad vět o podobnosti trojúhelníků:

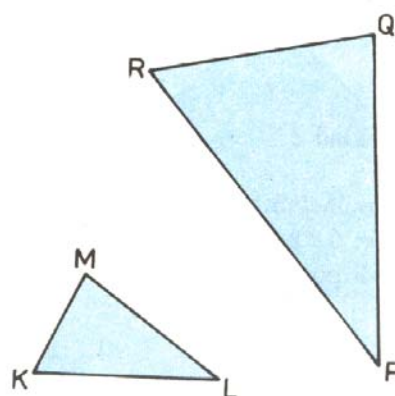
Znění věty	Označení věty	Příklad pro $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$	Obrázek
Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek všech tří dvojic odpovídajících si stran, jsou podobné.	<i>sss</i>	$\begin{aligned} a' : a &= \\ &= b' : b = \\ &= c' : c = \\ &= k \end{aligned}$	
Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek dvou dvojic odpovídajících si stran a shodují se v úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.	<i>sus</i>	$\begin{aligned} a' : a &= \\ &= b' : b = \\ &= k, \\ \gamma' &\cong \gamma \end{aligned}$	
Každé dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.	<i>uu</i>	$\begin{aligned} \alpha' &\cong \alpha \\ \beta' &\cong \beta \end{aligned}$	

2. Společná práce

Učitel na tabuli řeší příklady dle učebnice, žáci pracují v lavicích:

CVIČENÍ

- Na obr. 3.11 jsou naryšovány trojúhelníky KLM a PQR . Změřte jejich strany a zjistěte, zda jde o podobné trojúhelníky. V kladném případě podobnost запиšte a uveďte poměr podobnosti.



Obr. 3.11

2. Trojúhelníky ABC a TUV mají strany o délkách $a = 8,8$ cm, $b = 5,6$ cm, $c = 4,2$ cm, $t = 84$ mm, $u = 132$ mm, $v = 63$ mm. Zjistěte, zda jsou podobné. Jestliže ano, pak určete poměr podobnosti a запиšte tuto podobnost. (Návod: Strany uspořádejte podle velikosti a potom sestavte poměry délek odpovídajících si stran.)

3. Zjistěte, které z trojúhelníků jsou podobné, je-li dáno:

- a) v trojúhelníku ABC : $|\sphericalangle ABC| = 63^\circ$, $|\sphericalangle BCA| = 56^\circ$
- b) v trojúhelníku DEF : $d = 8$ cm, $e = 12$ cm, $f = 10$ cm
- c) v trojúhelníku GHI : $g = 5$ cm, $h = 6$ cm, $i = 7$ cm
- d) v trojúhelníku KLM : $|\sphericalangle KLM| = 61^\circ$, $|\sphericalangle MKL| = 62^\circ$
- e) v trojúhelníku NOP : $n = 3,5$ cm, $o = 3$ cm, $p = 2,5$ cm
- f) v trojúhelníku RST : $|\sphericalangle RST| = 63^\circ$, $|\sphericalangle STR| = 56^\circ$
- g) v trojúhelníku XYZ : $x = 18$ dm, $y = 15$ dm, $z = 12$ dm

3. Samostatná práce

Žáci dostávají zadání příkladů obdobné těm, které procvičili s vyučujícím v předešlé části a samostatnou prací získávají výsledky, které společně s postupem potom kontrolují na tabuli.

4. Práce žáků doma

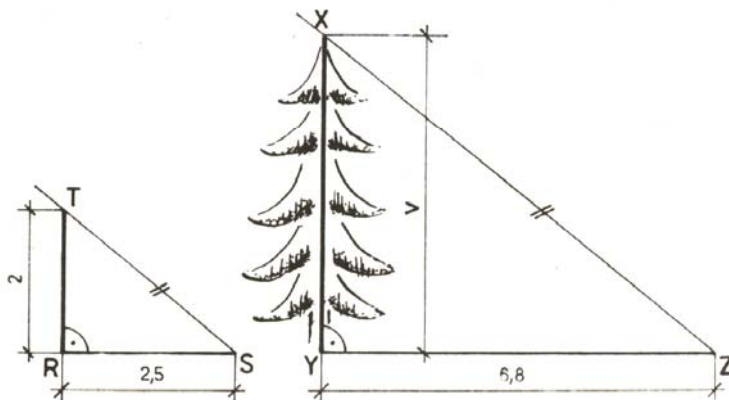
Na konci každé hodiny si žáci odnáší domácí úkol z procvičených typů příkladů.

5. Využití podobnosti v praxi

Učitel opět využívá příklady z učebnice a se žáky je v hodinách řeší. Příklad je zadán, žáci jej zkusí samostatně vyřešit a poté se společně zkontroluje na tabuli.

Typy úloh:

Na obr. 3.19 je znázorněna tato situace: Svislá dvoumetrová tyč vrhá stín 2,5 m dlouhý. Ve stejném vodorovném terénu stojí smrček neznámé výšky, jehož stín je dlouhý 6,8 m. Vypočítejte výšku smrku.



6. Zhodnocení:

Žáci na konci probrané kapitoly napíší klasickou písemku, která je oznámkována.

Zhodnocení dřívějšího postupu při probírání podobnosti trojúhelníků:

Výhody:

- jednoznačně nižší časové nároky na přípravu učitele, protože v podstatě k probrání látky stačí mít k dispozici pouze učebnici, tabuli
- žáci tímto způsobem mohou vyřešit ve stejném časovém úseku více příkladů

Nevýhody:

- učitel nezíská přehled o aktivitě a zapojení žáků do výuky, někteří se jen „vezou“, opisují z tabule a neřeší samostatně
- nerozvíjí se úroveň spolupráce a komunikace mezi žáky
- žáci jsou postaveni vesměs do role pasivního konzumenta předkládaných informací, na tvorbě hodiny nemají možnost spolupracovat
- hodnocení toho, co jsme žáky naučili je postaveno pouze na základě jedné písemné práce, má minimální výpovědní hodnotu o rozvoji žáka

Téma : Podobnost trojúhelníků (dnes)

Cíl: naučit žáky učivo podobnost trojúhelníků a dokázat je využívat v praktickém životě

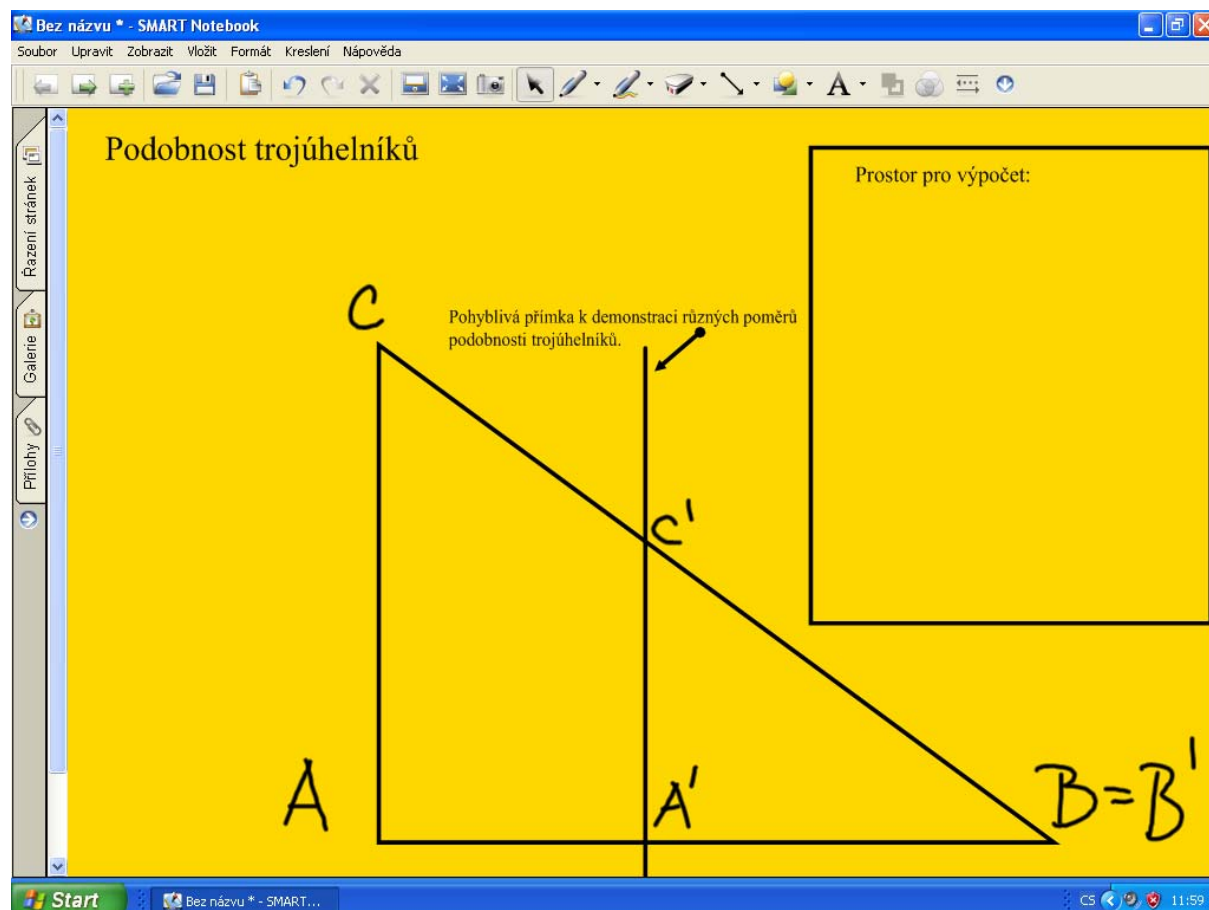
Metodický postup:

Učivo je od počátku probíráno s maximálním zapojením žáků. V době seznámení s podobností na základě diskuze se žáky a uváděním příkladů z praxe. V době procvičování je zapojení žáků ještě výrazně větší díky práci s interaktivní tabulí a následným zpracováním úkolu ve spolupráci s vybranou skupinou tvořenou žáky třídy. Samozřejmě některé hodiny mají podobný charakter jako v předešlé době a žáci po výuce u interaktivní tabule pracují s příklady z učebnice, sbírek úloh a podobně. Celkově se do výuky stále více zařazuje kooperativní způsob (od dvojic v lavici a zejména u tabule po skupiny při zpracování závěrečné práce tématu).

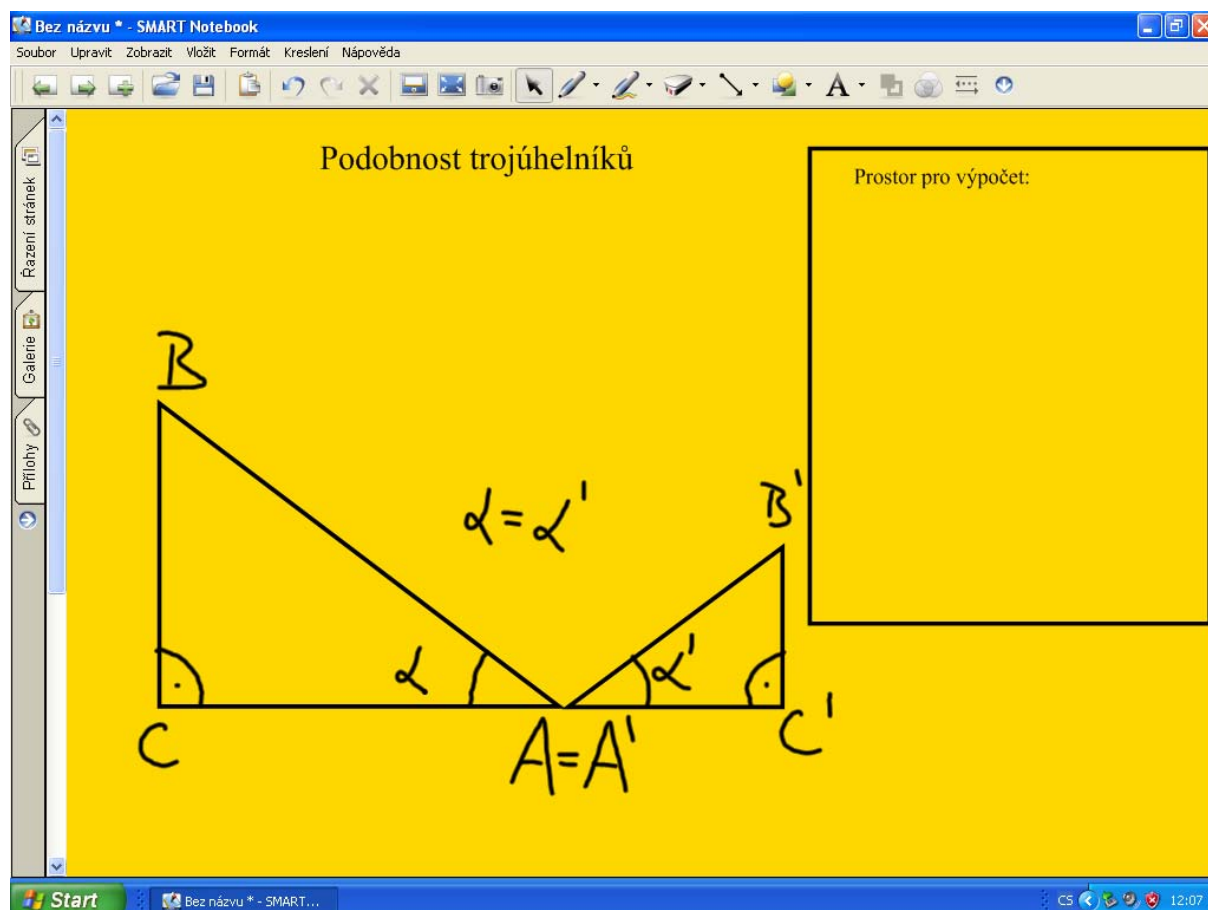
V další části práce již uvedu jen rozdíly oproti předešlému způsobu výuky:

Fáze procvičování a ověřování platnosti vět o podobnosti trojúhelníků (slouží současně jako přípravný návod k závěrečné práci – úkolu). Žáci se střídají u interaktivní tabule a pohybem dělicí přímky a změnou velikosti trojúhelníku ABC si každá u tabule pracující dvojice vytváří svůj příklad. Společně žáci změří velikosti stran, zapíší je a na tabuli vypočítají koeficient podobnosti, resp. stranu, kterou mají zakázáno změřit dopředu (kontrolují až po výpočtu). Zbytek skupiny pracuje samostatně v lavici a tabuli používá pouze ke kontrole.

Ukázka připraveného modelu:



Příklad dalšího typu řešených úloh. Žáci mění postupně velikosti trojúhelníků při zachování velikosti úhlů (hlídá úhloměrem jeden z pracující dvojice). Zadání resp. povolení změření velikosti stran vymýšlí pro každou dvojici u tabule zbytek skupiny pod citlivě regulujícím dohledem učitele.



V okamžiku, kdy mám pocit, že žáci danou látku dostatečně zvládli zavedu diskuzi na vhodné téma závěrečné práce, kterou si ověříme úspěšnost ve výuce, ať už z pohledu učitele či žáků. Vhodně vedenou debatou nasměřuji žáky k zadání, kdy si sami dají za úkol zjistit velikost sochy v parku v Lysicích. K zjištění potřebných údajů využiji jedné hodiny, kdy je venku slunečné počasí a dále mají možnost žáci pracovat ve svém volném čase. Celou skupinu 24 žáků rozdělím na 4 – 6ti členné kolektivy, které daný úkol řeší. Před zahájením si všichni společně vytváříme pracovní listy tak, aby bylo co možná nejsnazší porovnání a vyhodnocení práce skupin. Žáci si ve škole vyzvednou pomůcky (tyče, zrcadlo, pásma) a dají se do řešení. Je na nich samotných, jak si rozdělí úkoly, jak budou spolupracovat, kdo bude měřit, kdo zapisovat, počítat a ve výsledku práci skupiny prezentovat před ostatními.

Ukázka pracovního listu:

Zadání úkolu:

Nejprve odhadněte a poté zjistěte velikost Mariánského sloupu v parku na náměstí v Lysicích za použití alespoň dvou způsobů založených na podobnosti trojúhelníků.

Postup:

1. Zkuste si zadat svůj odhad:

1. člen skupiny

2. člen skupiny

3. člen skupiny

4. člen skupiny

5. člen skupiny

6. člen skupiny

2. Použitá metoda zjištění s využitím **tyče – zrcadla** (nehodící škrtni)

3. Nákres se změřenými údaji:

4. Výpočet:

5. Výsledek:

Nejlepší odhadce:

Ve druhém přístupu doplň porovnání výpočtů:

1. výpočet:

2. výpočet:

Rozdíl ve výsledcích:

Zpracovali:

Ilustrativní fotky z loňského roku:



Zhodnocení rozvoje kompetencí u žáků:

Kompetence k učení:

Žák:

- má snahu zadaný úkol zvládnout a pro tento cíl je ochoten vynaložit potřebné úsilí
- studijní výsledky považuje za důležité, neznevažuje práci těch, kteří se učí lépe ani hůře, ale je ochoten pomáhat v práci ostatním
- je schopen provést objektivní sebehodnocení
- umí vybrat z probírané látky vhodné učivo a postupy vedoucí k řešení úkolu
- si je vědom vhodnosti využívání pomůcek při učení (interaktivní tabule, pracovní listy,.....)

Kompetence k řešení problému:

Žák:

- má možnost vytvářet dostatečné množství úloh z reálného života a zvyšuje si úroveň samostatného uvažování
- je veden k tomu, aby uměl známé a osvědčené postupy řešení aplikovat při řešení obdobných nebo nových úkolů a problémů
- dokáže rozpoznat náročnost problému a je schopen posoudit své schopnosti úkol vyřešit
- si rozvíjí důvěru ve vlastní možnosti
- dokáže úkol nejen vytvářet, ale i systematicky a cílevědomě postupovat při jeho řešení
- dokáže ostatním členům skupiny vysvětlit své postupy pro řešení

Kompetence komunikativní:

Žák

- dokáže využívat komunikační prostředky pro řešení úkolů (hlavně ve spolupráci s ostatními)
- nemá obavy zeptat se pokud něčemu nerozumí, dokáže dotaz přiměřeně formulovat, netrpí pocitem nevhodnosti dotazu
- zejména při skupinové práci dokáže posouvat řešení příkladu dílčími kroky a postupy ke konečnému řešení
- dokáže vyjádřit nesouhlas pokud se domnívá, že řešení úkolu není správné a dokáže vysvětlit své řešení
- při společném řešení úkolu se dokáže vhodně zapojit do práce
- smíří se s tím, že i jiné řešení, než to které navrhuje, vede k cíli. Výsledek skupiny umí nadřadit individuálním zájmům
- výsledek posuzuje nejen z hlediska matematického řešení, ale dokáže posoudit i případný nesoulad se skutečností a realitou

Kompetence sociální a personální:

Žák

- účinně spolupracuje ve skupině, podílí se tvorbě pravidel práce v týmu
- podílí se na utváření příjemné pracovní atmosféry v týmu
- nabízí svou pomoc v případě potřeby, ale také si o ni umí říci
- při potížích se svou prací se snaží najít příčiny, účinně hledá pomoc a přijímá připomínky a rady jiných
- chápe potřebu efektivně spolupracovat s druhými při řešení daného úkolu
- učí se využívat zkušeností a dovedností jiných
- rozpozná své silné a slabé stránky, odhadne tak možnost splnění úkolu
- umí přijímat kritiku i chválu ze strany druhých a vyvodit z ní pro sebe potřebné závěry
- pod vedením učitele posuzuje co by se příště mělo dělat stejně a co jinak

Závěr:

Žáci si v tomto pojetí výuky našli svůj prostor pro seberealizaci a mnohem aktivněji přistupovali k plnění úkolů, které během výuky před nimi vystávaly. Dokázali se nadchnout pro práci s moderní technikou. Ve škole jsou od roku 2004 dvě interaktivní tabule a práce s nimi nabízí velké možnosti. Bohužel nelze tuto techniku zatím stále ještě používat dostatečně často. Žáky vyloženě bavilo vymýšlet zadání pro dvojice u tabule a tyto zase neskrývaly radost, když zadání úspěšně zvládly.

Jak je patrné z fotografií, žáci se ochotně zapojili i do společné práce na splnění závěrečného úkolu, mezi skupinami vznikla velmi silná ovšem zdravá a srdečná rivalita. Po skončení práce žáci vypracovali k odevzdání pracovní listy a před ostatními komentovali svoje pocity a dojmy ze spolupráce a plnění úkolu. Bylo konstatováno, že žádná ze skupin neměla se splněním úkolu žádné větší problémy a že žáci byli na tento úkol dostatečně vybaveni vědomostmi a dovednostmi ze školy. I já sám jsem měl z práce dětí dobrý pocit. Závěrečné hodnocení z mé strany bylo provedeno ústní formou (i když někteří žáci požadovali známku). Všechny skupiny se zhostily úkolu velmi dobře a bylo pro žáky velkým překvapením, že ani pracovnice stavebního úřadu na obci neznaly velikost Mariánského sloupu. Odchytky ve výsledcích jednotlivých skupin se pohybovaly v řádu několika centimetrů, tudíž bylo pro žáky (připomínám třetí výkonnostní skupina v devátém ročníku) velkým zadostiučiněním, že mohli informaci o výšce sloupu pracovním úřadu předat.